

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

Monsieur BOSSAVIT Alain

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la thèse : *Sur la régularisation des équations variationnelles*
soutenue le 26 MARS 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. LIONS Président

J. CEA Examineurs

P. PRIOURET

N° d'enregistrement
au C.N.R.S.

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

DE PARIS

par

Monsieur BOSSAVIT Alain

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la thèse : *Sur la régularisation des équations variationnelles*
soutenue le 26 MARS 1971 devant la Commission d'Examen

MM. J.L. LIONS Président

J. CEA Examineurs

P. PRIOURET



INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude du procédé de régularisation appliqué aux équations variationnelles. Les remarques suivantes l'ont motivé.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ régulière et soit u la solution du problème de DIRICHLET suivant :

$$(0.1) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u + u = f \\ \text{ii)} & u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

On démontre (LIONS^[13]) que les solutions u_{ε} de

$$(0.2) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} = f \\ \text{ii)} & u_{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu} = g \end{cases}$$

(avec $\varepsilon > 0$) convergent vers u en un certain sens pour f et g convenables.

Le système (2) admet une formulation variationnelle dans $H^1(\Omega)$. On peut donc approcher u_{ε} par la méthode variationnelle des différences finies ([2],[7]) d'où une approximation "en deux temps" de u . Les u_{ε} étant plus réguliers que u , cette méthode permet de traiter des données irrégulières (par exemple, $g \in L^2(\Gamma)$). D'autre part, il existe pour (2) des programmes préétablis [22].

Ceci conduit à l'étude locale de u_{ε} , comme fonction de ε , au voisinage de 0. Si l'on note $((u,v))$ le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$, (2) s'écrit, sous forme variationnelle:

$$(0.3) \quad \int_{\Gamma} u_{\epsilon}^v + \epsilon((u_{\epsilon}, v)) = \int_{\Gamma} gv + \epsilon \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Adoptant le point de vue de la régularisation (Cf. LIONS [14], [15]) (3) provient, par régularisation, de :

$$(0.4) \quad \int_{\Gamma} uv = \int_{\Gamma} gv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

(qui est une formulation variationnelle pour la contrainte (1) ii)) .

Plus généralement nous avons étudié l'approximation par régularisation d'équations variationnelles du type

$$(0.5) \quad \pi(u, v) = L(v) \quad \forall u \in V$$

avec π bilinéaire, continue, symétrique, positive et L linéaire continue, équation dont (4) est un exemple.

La section 1 traite du problème de la convergence. Bien que (5) n'aie pas toujours une solution dans V , on peut toujours construire un espace contenant V où les u_{ϵ} convergent.

Nous étudions ensuite (section 2) le comportement de u_{ϵ} au voisinage de 0, montrant que la régularité de la fonction $\epsilon \mapsto u_{\epsilon}$ dépend de la régularité de la solution limite u . Si cette régularité est suffisante, la connaissance des dérivées $u_{\epsilon}^{(k)}$ pour $\epsilon > 0$ fixé permet d'approcher u par un développement limité au voisinage de ϵ , ce qui suggère des méthodes d'accélération de la convergence.

Les applications au problème modèle (1)(2) ci-dessus sont développées au fur et à mesure. Nous indiquons, à la section 3, d'autres applications:

- A l'approximation de certains problèmes aux limites non homogènes par des problèmes variationnels.

- A l'approximation de problèmes aux limites par des problèmes analogues définis dans des ouverts plus étendus (méthode du "domaine auxiliaire", [19]).

- A certains phénomènes de perturbation singulière.

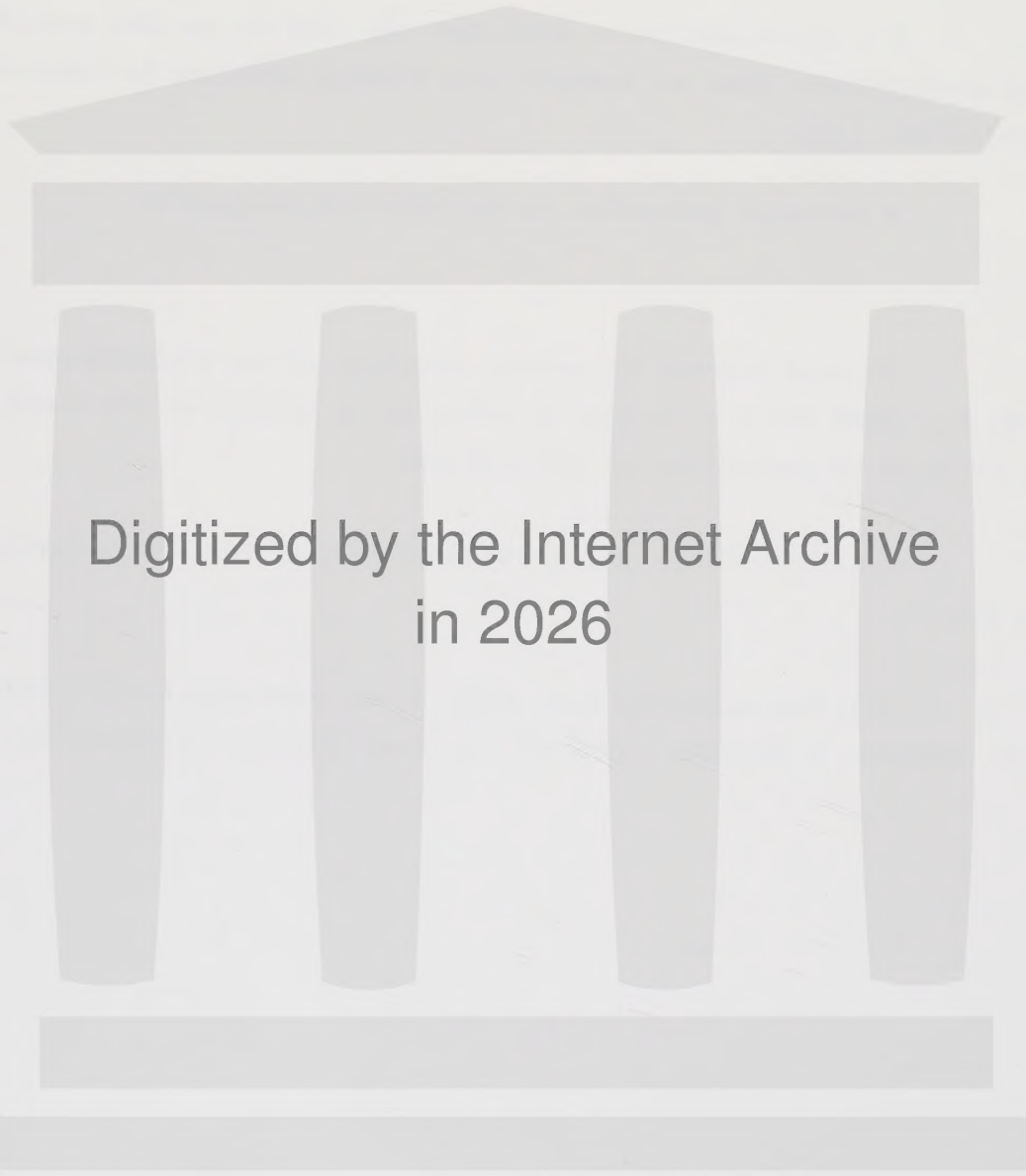
A l'approximation de problèmes aux limites par des problèmes analogues définis dans des ouverts plus étendus (méthode du domaine auxiliaire, [19]).

A certains phénomènes de perturbation singulière.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde gratitude à M. J.L.LIONS qui m'a suggéré le thème de ce travail et n'a cessé par la suite de me conseiller et m'encourager.

Je remercie MM. CEA et PRIOURET d'avoir bien voulu participer au jury.

Mes remerciements vont enfin à mes camarades A.BENSOUSSAN
J.C. NEDELEC, B.NIVELET, L.TARTAR pour leur amicale collaboration.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543732_0026

P L A N

Section 1. REGULARISATION D'EQUATIONS VARIATIONNELLES

1. Exemple type. Position du problème.

1.1. Notations.

1.2. Idée de la régularisation.

2. Formalisation

2.1. L'espace V et les formes $\pi(u,v)$ et $a(u,v)$.

2.2. Equation variationnelle initiale et équations régularisées.

2.3. Espaces H et V' .

2.4. Exemples.

3. Théorème de convergence

3.1. Convergence dans V' .

3.2. Convergence dans V .

3.3. Interpolation.

3.4. Remarques sur certains problèmes d'optimisation.

4. Quelques variantes du théorème de convergence

4.1. Second membre variable.

4.2. Point de vue opérationnel.

4.3. Perturbations sur $\pi(u,v)$ et $a(u,v)$.

Section 2. ETUDE DE u_ϵ EN FONCTION DE ϵ

1. Evaluation de l'erreur

1.1. Enoncé du résultat, conséquences.

1.2. Démonstration du théorème 1.2.

1.3. Orientation.

2. Etude de u_ϵ dans le cas $a(u,v)$ symétrique

- 2.1. Convergence et estimation de l'erreur.
- 2.2. Accélération de la convergence par la méthode de Richardson
- 2.3. Accélération de la convergence. Développement limité de $u_\epsilon \dots$
- 2.4. Remarques sur le développement en série. Une méthode itérative.

3. Etude de u_ϵ dans le cas général

- 3.1. Cadre fonctionnel.
- 3.2. Existence des dérivées pour $\epsilon > 0$.
- 3.3. Continuité de u'_ϵ pour $\epsilon = 0$. Applications.
- 3.4. Dérivées d'ordre supérieur.
- 3.5. Accélération de la convergence.

Section 3. APPLICATIONS

1. Quelques problèmes aux limites elliptiques d'ordre 4, non homogènes

- 1.1. Un exemple relatif à Δ^2 (exemple 1)
- 1.2. Un exemple relatif à $\Delta^2 + 1$ (exemple 2)
- 1.3. Exemples relatifs à $\Delta^2 + 1$ avec une seule condition stable (ex.3 et 4).
- 1.4. Un exemple avec deux conditions stables (exemple 5).

2. Sur la méthode du domaine auxiliaire

- 2.1. Notations et rappel de la méthode.
- 2.2. Convergence et estimations de l'erreur.

3. Perturbation singulière d'opérateurs elliptiques

- 3.1. L'espace V est $H^2_0(\Omega)$ (exemple 1) .
- 3.2. L'espace V est H^2_Y (exemple 2) .
- 3.3. L'espace V est H^2_∂ (exemples 3 et 4) .
- 3.4. L'espace V est $H^1(\Delta; \Omega)$ (exemples 5 et 6) .
- 3.5. Régularité.

SECTION 1

REGULARISATION d'EQUATIONS VARIATIONNELLES

Cette section est consacrée au problème de la convergence. Le n°1, qui reprend l'Introduction générale, expose les notations et justifie le point de vue adopté, sur l'exemple (0.1) (0.2). Au n°2, on pose le problème sous forme abstraite. On démontre au n°3 les résultats de convergence, puis au n°4 quelques variantes utiles pour la suite.

Les notations et résultats généraux sont illustrés par l'exemple du problème de Dirichlet non homogène. On signale par le signe (*), au début et à la fin, les paragraphes correspondants.

1 . EXEMPLE TYPE ; POSITION DU PROBLEME.

(*) 1.1 Notations.

Soit Ω un ouvert borné "suffisamment régulier" ⁽¹⁾ de R^n .
Soient a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ et a_0 des fonctions réelles données sur Ω , avec

$$(1.1) \quad a_{ij} \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad a_0 \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(1.2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2, \alpha > 0, \forall \xi \in R^n, \forall x,$$

$$(1.3) \quad a_0(x) \geq \alpha > 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Soient A et A^* les opérateurs différentiels ainsi définis :

$$(1.4) \quad Au = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u$$

$$(1.5) \quad A^*u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ji}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}) + a_0(x)u$$

La forme bilinéaire

$$(1.6) \quad a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0 uv dx$$

est continue sur $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(1.7) \quad ((u, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} uv dx.$$

Il existe donc $\beta > 0$ tel que

$$(1.8) \quad a(u, v) \leq \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

⁽¹⁾ Nous renvoyons à LIONS-MAGENES [16] et à la bibliographie de cet ouvrage pour toutes les questions de régularité.

L'inégalité de coercivité suivante a lieu, d'après (1.2) et (1.3):

$$(1.9) \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

On notera les dérivées normales (selon la normale extérieure à Γ), lorsqu'elles existent, sous la forme ci-dessous

$$(1.10) \quad \begin{cases} i) & \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right) |_{\Gamma} \\ ii) & \frac{\partial u}{\partial \nu_{A^*}} = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cos(n, x_i) \right) |_{\Gamma} \end{cases}$$

où $\cos(n, x_i)$ est le i -ème cosinus directeur de la normale à Γ .

(*) 1.2 Idée de la régularisation.

Supposons d'abord A symétrique ($a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$) et posons

$$(1.11) \quad J(v) = a(v, v) - 2 \int_{\Omega} f(x) v(x) dx$$

avec f donnée (par exemple) dans $L^2(\Omega)$. On sait que le problème de Dirichlet homogène :

$$(1.12) \quad \begin{cases} i) & Au = f \quad \text{dans } \Omega \\ ii) & u|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

équivalent à la recherche de u dans $H_0^1(\Omega)$ ⁽¹⁾ réalisant le minimum de J , problème que nous noterons ainsi :

$$(1.13) \quad J(u) = \inf_{\{v \in H_0^1(\Omega)\}} J(v)$$

équivalent ⁽²⁾ au problème de minimum avec contraintes suivant :

$$(1.14) \quad J(u) = \inf_{\{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}} J(v)$$

⁽¹⁾ $H_0^1(\Omega)$ est, par définition, l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

⁽²⁾ En effet, si Ω est assez régulier, $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $v \in H^1(\Omega)$ de trace $v|_{\Gamma}$ nulle. (cf [16]).

De même, le problème de Dirichlet *non-homogène*

$$(1.15) \quad \begin{cases} i) & Au = f & \text{dans } \Omega \\ ii) & u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

équivalent, s'il admet une solution dans $H^1(\Omega)$, au problème de minimum

$$(1.16) \quad J(u) = \inf_{\{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = g\}} J(v)$$

On applique au problème (1.16) la méthode de pénalisation ([4], [14]) qui consiste à approcher (1.16) par une suite de problèmes de minimum *sans contraintes*⁽¹⁾

$$(1.17) \quad J_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) = \inf_{\{v \in H^1(\Omega)\}} J_{\varepsilon}(v) = \inf_{\{v \in H^1(\Omega)\}} \left[J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} |v - g|^2 d\Gamma \right]$$

Or, (1.17) équivaut à l'équation variationnelle suivante (dite *équation d'Euler*):

$$(1.18) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon} v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}, v) = \int_{\Gamma} g v + \varepsilon \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

et on vérifie, à l'aide de la formule de Green, que u_{ε} est solution du problème de Neumann ci-dessous :

$$(1.19) \quad \begin{cases} i) & Au_{\varepsilon} = f \\ ii) & u_{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu_A} = g \end{cases}$$

Ceci justifie l'approximation de (1.15) par (1.19).

Si A n'est pas symétrique, (1.18)-(1.19) a toutefois un sens et il y a existence d'après le lemme de LAX-MILGRAM. C'est donc la forme (1.18) du problème qu'on étudiera. Du fait de la dualité entre pénalisation et régularisation [4], on peut toujours considérer (1.18) comme régularisée de

$$(1.20) \quad \int_{\Gamma} u v = \int_{\Gamma} g v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (*)$$

⁽¹⁾ Dans tout ce qui suit, ε est un nombre réel positif ou nul.

2 . FORMALISATION.

2.1 L'espace V et les formes $\pi(u,v)$ et $a(u,v)$.

Soit V un espace de Hilbert réel séparable⁽¹⁾, où le produit scalaire est noté $((,))$ et la norme $\| \cdot \|$. On se donne :

1) Une forme bilinéaire continue $\pi(u,v)$, réelle, symétrique⁽²⁾, positive:

$$(1.21) \quad \pi(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V.$$

2) Une forme bilinéaire continue $a(u,v)$, réelle, non nécessairement symétrique, vérifiant la condition de coercivité :

$$(1.22) \quad a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V, \alpha > 0.$$

3) Une forme linéaire continue $v \rightarrow L(v)$, réelle⁽²⁾, sur V .

4) Un élément fixe μ de V (ce qui revient à la donnée d'une deuxième forme linéaire $v \rightarrow a(\mu,v)$)

La continuité de $a(u,v)$ entraîne l'existence de $\beta > \alpha > 0$ tel que :

$$(1.23) \quad |a(u,v)| \leq \beta \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in V.$$

On notera N le sous-espace vectoriel fermé de V défini par :

$$(1.24) \quad N = \{u \mid \pi(u,u) = 0\} = \{u \mid \pi(u,v) = 0, \quad \forall v \in V\}$$

et on fera jusqu'à la fin l'hypothèse que

$$(1.25) \quad L(v) = 0 \quad \forall v \in N.$$

⁽²⁾ De même, $\pi(u,v)$ pourrait être hermitienne, à partie réelle positive ; et L un élément de l'anti-dual V' de V .

⁽¹⁾ Ceci pour simplifier. Les résultats qui suivront valent pour V Hilbert quelconque.

(*) Exemple .

Soit $V = H^1(\Omega)$, $a(u, v)$ défini par (1.6),

$$(1.26) \quad \pi(u, v) = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma$$

(qui est bien continue sur V d'après la continuité de la trace [10] dans $L^2(\Gamma)$)

$$(1.27) \quad L(v) = \int_{\Gamma} g v \, d\Gamma$$

en supposant, pour assurer la continuité,

$$(1.28) \quad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad .$$

L'espace N est $H_0^1(\Omega)$ (cf. notes de bas de page, p. 8) et (1.25) a lieu.

Quant à μ , on voit, comparant (1.18) et (1.35) qu'il vérifie

$$(1.29) \quad a(\mu, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Il suffit, pour que μ existe et appartienne à $H^1(\Omega)$ que

$$(1.30) \quad f \in L^2(\Omega)$$

ce que nous supposons désormais. On trouve alors μ comme solution du problème de Neumann :

$$(1.31) \quad \begin{cases} i) & A \mu = f \text{ dans } \Omega \\ ii) & \frac{\partial \mu}{\partial \nu_A} = 0 \text{ sur } \Gamma . \end{cases}$$

Remarque 1.1.

Remplaçant (1.31) (ii) par

$$(1.32) \quad \frac{\partial \mu}{\partial \nu_A} = h \text{ sur } \Gamma$$

avec $h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on est encore dans le cadre ci-dessus avec, au lieu de (1.19)

$$(1.33) \quad \begin{cases} i) A u_{\varepsilon} = f \\ ii) u_{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu_A} = g + \varepsilon h \end{cases}$$

On reviendra plus loin sur la question du meilleur choix de h . ▨

(*)

2.2 Equation variationnelle initiale, et régularisées.

Conformément au point 1, on pose d'abord le

Problème 1.1. — Trouver $u \in V$ tel que

$$(1.34) \quad \pi(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

et on lui associe la famille des problèmes régularisés suivants :

Problème 1.2. — Trouver $u_{\varepsilon} \in V$ tel que, si $\varepsilon > 0$,

$$(1.35) \quad \pi(u_{\varepsilon}, v) + \varepsilon a(u_{\varepsilon}, v) = L(v) + \varepsilon a(\mu, v) \quad \forall v \in V.$$

L'ensemble X des solutions du Pb. 1.1 est soit vide, soit formé d'un sous-espace affine de V parallèle à N . Par contre le Pb. 1.2 admet toujours une solution (unique) d'après (1.21), (1.22) et le lemme de LAX. MILGRAM. On sait ([14]) que, si X n'est pas vide, u_{ε} converge ⁽¹⁾ vers un élément de X que l'on peut caractériser. Nous allons généraliser ce résultat sans hypothèse a priori sur X .

2.3 Espaces H et V' .

Introduisons le sous-espace vectoriel (fermé) suivant, supplémentaire de N :

$$(1.36) \quad M = \{u^m \mid a(u^m, v) = 0 \quad \forall v \in N\}$$

avec la décomposition canonique, unique, $V = M \oplus N$, soit

(1) Lorsque ε tend vers zéro, comme on le sous-entend constamment dans tout ce qui suit.

$$(1.37) \quad u = u^m + u^n, \quad u^m \in M, \quad u^n \in N$$

et

$$(1.38) \quad a(u, v) = a(u^n, v) \quad \forall v \in N.$$

Sur V on définit un nouveau produit scalaire

$$(1.39) \quad (u, v) = \pi(u, v) + ((u^n, v^n))$$

pour lequel V est préhilbertien puisque $(u, u) = 0$ entraîne $u = 0$.

Soit H le complété de V pour (1.39). Identifions H à son dual; cela revient à identifier H à un sous-espace (dense) de V' . On a donc la situation suivante :

$$(1.40) \quad V \subset H \subset V'$$

avec injection continue et densité de chaque espace dans le suivant, et

$$(1.41) \quad \langle u, v \rangle_{V', V} = (u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Remarquons que les topologies induites par H et V sur N coïncident; N est donc fermé dans V' . Il s'ensuit (théorème de Riesz) que l'équation

$$(1.42) \quad ((u^n, v)) = \langle u, v \rangle_{V', V} \quad \forall v \in N$$

où u est donné quelconque dans V' admet une solution u^n unique dans N . Posant $u^m = u - u^n$, on a ainsi décomposé V' en somme directe de deux sous-espaces; d'après (1.39) et (1.41), cette décomposition prolonge (1.37) à H et V' . De plus, le sous-espace parcouru par u^m s'identifie à M' et

$$(1.43) \quad M \subset \hat{M} \subset M'$$

avec injection continue et densité. Finalement

$$(1.44) \quad V' = M' \oplus N$$

par prolongement de (1.37).

Remarque 1.2. Les applications $u \rightarrow u^n$ et $u \rightarrow u^m$ sont continues de V dans V et de V' dans V' . 

Remarque 1.3. Revenons à l'existence dans le Pb. 1.1. La forme $L(v)$ étant linéaire continue sur V , il existe u^* unique dans V' tel que $L(v) = \langle u^*, v \rangle \quad \forall v \in V$. D'après (1.25) et (1.42), $u^* \in M'$. Posons $u^* = u_0^m$ (en vue du §2). Alors :

$$(1.45) \quad \pi(u, v) = \langle u_0^m, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Rapprochant (1.45) et (1.39), on voit que l'hypothèse d'existence revient à supposer $u_0^m \in M$ (et non seulement $u_0^m \in M'$). ▣

(*) 2.4 Exemple.

D'après (1.36), M est l'ensemble des fonctions u^m de $H^1(\Omega)$ vérifiant

$$(1.46) \quad A u^m = 0$$

au sens des distributions dans Ω , noté H_A^1 . Pour obtenir la décomposition canonique, on résout (1.38), soit ici :

$$(1.47) \quad \begin{cases} i) & A u^n = A u & \text{dans } \Omega \\ ii) & u^n = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On peut toujours définir abstraitement H et V' comme plus haut, mais en pratique il importe (pour interpréter les résultats de convergence qui vont suivre) d'identifier H et V' à des espaces *concrets* (de distributions sur Ω).

Ecrivons la dualité (1.41) :

$$(1.48) \quad \langle u, v \rangle_{(H^1(\Omega))', H^1(\Omega)} = \int_{\Gamma} u v \, d\Gamma + ((u^n, v^n))$$

On sait que l'opérateur *trace* sur Γ met $M = H_A^1$ en correspondance

biunivoque avec $H_A^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, sous-espace *dense* de $L^2(\Gamma)$. D'après (1.48) cette correspondance est une isométrie ; il y a donc isomorphisme entre $\hat{M}$ et $L^2(\Gamma)$, ce qui permet d'écrire :

$$H = L^2(\Gamma) \oplus H_0^1(\Omega)$$

Or, d'après [16], il y a isomorphisme entre $L^2(\Gamma)$ et

$$H_A^{\frac{1}{2}} = \{u \mid u \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega), A u = 0\}$$

muni de la topologie induite par $H_A^{\frac{1}{2}}(\Omega)$. Donc

$$(1.49) \quad H = H_A^{1/2} \oplus H_0^1(\Omega)$$

ce qui est le résultat "concret" cherché. En effet (1.49) montre que H comprend les fonctions de la forme $u = u^m + u^n$ avec $u^n \in H_0^1(\Omega)$ et $u^m \in H_A^{\frac{1}{2}}$, muni de la topologie (1.48). Celle-ci étant *plus fine* que celle de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, H s'identifie à un sous-ensemble dense de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$.

Remarque 1.4.

Le point essentiel est l'isomorphisme entre $L^2(\Gamma)$ et $H_A^{\frac{1}{2}}$, démontré dans [16]. Rappelons que ce résultat suppose la régularité (1.1) des a_{ij} et la régularité de Ω . ▣

Cherchons maintenant V' . Identifier H et H' revient, d'après (1.49) à identifier $L^2(\Gamma)$ à son dual; M' est donc isomorphe à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, par l'application trace sur Γ . Ainsi

$$V' = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \oplus H_0^1(\Omega)$$

qui s'identifie à

$$(1.50) \quad V' = L_A^2(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)$$

où $L_A^2(\Omega)$ est l'espace suivant, isomorphe d'après [16] à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$L_A^2(\Omega) = \{u \mid u \in L^2(\Omega), A u = 0\}.$$

Remarque 1.5.

L'espace V' s'identifie à un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$, avec injection continue; c'est donc en particulier au sens de $L^2(\Omega)$ que seront valables les résultats de convergence sur cet exemple. ▣ (*)

3 . THEOREME DE CONVERGENCE.

3.1. Convergence dans V' .

Nous allons démontrer le

Théorème 1.1. - Si (1.21), (1.22), (1.25) ont lieu, la solution u_ϵ du Problème 1.2 converge vers l'élément u_0 de V' défini par

$$(1.51) \quad u_0 = u_0^m + \mu^n$$

où u_0^m est l'unique élément de M' tel que

$$(1.52) \quad \langle u_0^m, v \rangle = L(v) \quad \forall v \in V.$$

Démonstration.

1) Soit $v \in N$ dans (1.35). On voit que $u_\epsilon^n = \mu^n$.

2) Montrons que ϵu_ϵ tend vers zéro dans V . Soit $v = u_\epsilon$ dans (1.35). Il vient

$$(1.53) \quad \epsilon \|u_\epsilon\| \leq \epsilon \beta / \alpha \|\mu\| + \frac{1}{\alpha} |u_0^m|_V,$$

L'ensemble des $\{\epsilon u_\epsilon\}$ étant borné dans V d'après (1.53), il existe une suite ϵ_i , $i = 1, \dots, \infty$, décroissante, de limite 0, telle que $\epsilon_i u_{\epsilon_i}$ converge faiblement vers un certain $w \in V$ (relative compacité faible des bornés dans un Hilbert). Multipliant (1.35) par ϵ_i et passant à la limite, on obtient

$$(1.54) \quad \pi(w, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

donc $w^m = 0$. Or $\epsilon_i u_{\epsilon_i}^n = \epsilon_i \mu^n \rightarrow 0$, donc $w^n = 0$ et $w = 0$. L'ensemble $\{\epsilon u_\epsilon\}$ admet donc 0 pour unique point d'accumulation et

$$(1.55) \quad \epsilon u_\epsilon \rightharpoonup 0 \text{ dans } V \text{ faible.}$$

Soit maintenant $v = \epsilon u_\epsilon$ dans (1.35). Le second membre tend vers 0 d'après (1.55) et le premier membre majore $\alpha \epsilon^2 \|u_\epsilon\|^2$ d'après (1.21) et (1.22), d'où la convergence forte cherchée.

3) Montrons que $u_\epsilon^m \rightarrow u_0^m$ dans V' fort. D'après (1.35), (1.52), on a

$$\langle u_\epsilon^m - u_0^m, v \rangle = \epsilon a(u - u_\epsilon, v)$$

et d'après le point 2, le second membre tend vers 0 uniformément sur tout borné de V , d'où le résultat. 

(*) Exemple.

Soit g donné dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Alors, d'après (1.48) et (1.52), u_0^m est solution de

$$(1.56) \quad \begin{cases} i) & A u_0^m = 0 \\ ii) & u_0^m|_\Gamma = g \end{cases}$$

et u^n vérifie, d'après (1.29) et (1.47) :

$$(1.57) \quad \begin{cases} i) & A u^n = f \\ ii) & u^n|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

Rapprochant (1.56) et (1.57), on voit que u_0 est solution de (1.15). On a donc montré la convergence de u_ϵ , solution de (1.19) vers u_0 , au sens de V' , c'est à dire (Remarque 1.5) en particulier au sens de $L^2(\Omega)$. (*)

Orientation

Sans hypothèse de régularité de nature à assurer l'existence dans le Pb. 1.1, on a pu montrer la convergence des solutions régularisées dans un espace V' plus grand que l'espace de départ V . On rappellera ci-dessous comment l'hypothèse d'existence entraîne la convergence dans V , pour interpoler ensuite entre ces résultats.

3.2. Convergence dans V .

Le résultat suivant est connu ([14], [17]) :

Proposition 1.1. - Sous les hypothèses du Théorème 1.1, et si $u_0^m \in M$, il y a convergence de u_ϵ vers u_0 dans V .

Démonstration.

1) Les u_ϵ restent bornés dans V . En effet, u_0 vérifiant (1.34), (1.35) s'écrit :

$$(1.58) \quad \pi(u_\epsilon - u_0, v) + \epsilon a(u_\epsilon - u, v) = 0$$

pour tout $v \in V$, en particulier $v = u_\epsilon - u_0$, d'où, grâce à (1.21), (1.23)

$$(1.59) \quad \|u_\epsilon - u_0\| \leq \beta/\alpha \|u - u_0\|$$

2) Convergence faible, ⁽¹⁾ Soit $u_\epsilon \rightharpoonup w$. On sait déjà que $w^n = u^n$. Passant à la limite dans (1.58), on voit que $w^m = u_0^m$; donc $w = u_0$.

3) Convergence forte. Soit $v = u_\epsilon - u_0$ dans (1.58). Il vient

$$a(u_\epsilon, u_\epsilon) \leq a(u_\epsilon, u_0) + a(u, u_\epsilon - u_0)$$

et le second membre tend vers $a(u_0, u_0)$ d'après le point 2). La forme quadratique $v \rightarrow a(v, v)$, continue et convexe, est faiblement semi-continue inférieurement, donc

$$a(u_0, u_0) \leq \liminf a(u_\epsilon, u_\epsilon)$$

donc $a(u_\epsilon, u_\epsilon)$ tend vers $a(u_0, u_0)$ et ceci joint à la convergence faible, entraîne la convergence forte de u_ϵ vers u . 

Remarque 1.6.

L'hypothèse d'existence ($u_0^m \in M$) est équivalente au fait que les u_ϵ restent bornés dans V . 

Remarque 1.7.

Posant $v = u_\epsilon - u_0$ dans (1.58), on obtient une majoration dans H :

$$(1.60) \quad |u_\epsilon - u_0|_H^2 \leq \epsilon \frac{\beta^2}{4\alpha} \|u - u_0\|^2 \quad \text{$$

⁽¹⁾ Raisonnement du même type qu'au point 2) de la démonstration du Th. 1.1. Nous abrègerons de même, par la suite, toutes les démonstrations analogues.

(*) Exemple.

L'hypothèse d'existence signifie qu'il existe dans $H^1(\Gamma)$ des fonctions de trace g sur Γ , donc (théorème de traces, [16]) que

$$(1.61) \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

C'est donc une *hypothèse de régularité* sur g (ou sur u_0).

L'inégalité (1.60) donne un renseignement sur la convergence des traces $u_\epsilon|_\Gamma$ vers g :

$$(1.62) \quad \int_\Gamma |u_\epsilon - g|^2 d\Gamma \leq \epsilon \frac{\beta^2}{4\alpha} \|u_0^m\|^2$$

(notons que $\|u_0^m\| \leq c |g|_{\frac{1}{H^2}(\Gamma)}$ d'après (1.56)). (*)

Orientation.

Alors que sans hypothèse de régularité (* du type de (1.61)*) sur u_0 on n'obtient pas d'autre renseignement que la convergence dans V' , on a ici la convergence dans V et les majorations a priori (1.59) et (1.60). Pour pouvoir exploiter des hypothèses de régularité moins fortes (* intermédiaires entre (1.28) et (1.61)*) nous introduisons des espaces intermédiaires entre V et V' .

3.3. Interpolation.

Nous renvoyons à [16] pour la théorie de l'interpolation hilbertienne. Rappelons quelques résultats :

- 1) Etant donnés deux Hilbert V et V' , V dense dans V' avec injection continue, on peut définir des *espaces d'interpolation* V_θ , $\theta \in [-1, 1]$,

$$V \subset V_{\theta_1} \subset V_{\theta_2} \subset V' \quad \text{si } \theta_1 > \theta_2$$

chaque espace dense dans le suivant avec injection continue, de telle sorte que V [resp. V'] coïncide avec V_1 [resp. V_{-1}].

2) Dans le contexte actuel ($V \subset H \subset V'$), H coïncide avec V_0 , et $V_{-\theta}$ s'identifie au dual de V_θ .

3) On a les *inégalités d'interpolation* suivantes, avec des notations évidentes :

$$(1.63) \quad |u|_\theta \leq |u|_1^\theta |u|_0^{1-\theta} \quad \forall u \in V$$

$$(1.64) \quad |u|_{-\theta} \leq |u|_0^{1-\theta} |u|_{-1}^\theta \quad \forall u \in H$$

4) Si j_ϵ est une famille d'applications linéaires continues de V dans V et de V' dans V' et si j_ϵ converge simplement vers l'identité dans V et dans V' , il en est de même dans les V_θ :

$$(1.65) \quad \begin{cases} i) j_\epsilon \in \mathcal{L}(V, V) \cap \mathcal{L}(V', V') , \\ ii) j_\epsilon u \rightarrow u \text{ dans } V [\text{resp. } V'] \quad \forall u \in V [\text{resp. } V'] \end{cases}$$

entraîne

$$(1.66) \quad \begin{cases} i) j_\epsilon \in \mathcal{L}(V_\theta, V_\theta) \quad \forall \theta \in [-1, 1] , \\ ii) j_\epsilon u \rightarrow u \text{ dans } V_\theta . \end{cases}$$

Compte tenu de ces résultats, on peut généraliser ainsi le Th. 1.1:

Théorème 1.2. - Si (1.21), (1.22), (1.25) ont lieu et si la forme linéaire L est continue (non seulement sur V mais) sur V_θ (i.e. si la solution $u_0 = u_0^m + \mu^n$ appartient à $V_{-\theta}$) avec $-1 \leq \theta \leq 1$, la solution u_ϵ du Pb. 1.2. converge vers u_0 au sens de $V_{-\theta}$ fort.

Démonstration : Pour $\epsilon > 0$ fixé, l'équation

$$(1.67) \quad \pi(u_\epsilon, v) + \epsilon a(u_\epsilon, v) = \langle u, v \rangle + \epsilon a(\mu, v) \quad \forall v \in V$$

admet une solution unique, notée $u_\epsilon = j_\epsilon u \in V$, linéaire continue par rapport à $u \in V'$ quelconque. Le Théorème 1.1 et la Proposition 1.1 entraînent (1.65) d'où (1.66) qui est le résultat annoncé. 

(*) Exemple. D'après [16] , l'espace

$$H_A^{(1+\theta)/2} = \{u | u \in H^{(1+\theta)/2}(\Omega), Au = 0\}$$

est isomorphe, pour $\theta \geq -1$, à $H^{\theta/2}(\Gamma)$, espace de Sobolev fractionnaire. On a donc

$$(1.68) \quad V_\theta = H_A^{(1+\theta)/2} \oplus H_0^1(\Omega)$$

Dire que $L(v) = \int_\Gamma gv$ est continue sur V_θ revient à supposer

$$(1.69) \quad g \in H^{-\theta/2}(\Gamma)$$

et par conséquent $u_0 \in H_A^{(1-\theta)/2} \oplus H_0^1(\Omega)$. La convergence a lieu dans cet espace, donc *en particulier au sens de la topologie forte de* $H^{(1-\theta)/2}(\Omega)$. Les traces $u_\varepsilon|_\Gamma$ convergent vers g dans $H^{-\theta/2}(\Gamma)$. (*)

3.4. Remarques (sur certains problèmes d'optimisation).

Examinons plus particulièrement le cas où $\theta = 0$, ce qui revient à faire l'hypothèse suivante :

$$(1.70) \quad \{v \rightarrow L(v) \text{ est continue sur } V \text{ pour la topologie induite par } H\}$$

Introduisons le problème d'optimisation associé au Pb. 1.1. Soit

$$(1.71) \quad J(v) = \pi(v, v) - 2L(v).$$

Cette forme quadratique n'admet pas nécessairement de borne inférieure, mais on démontre aisément le

Lemme 1.1. - Si $J(v)$ défini par (1.71) admet une borne inférieure, (1.70) a lieu et réciproquement.

Or on sait par ailleurs ([14]) que

Proposition 1.2. - Le problème 1.1 est équivalent au problème de minimum suivant

$$(1.72) \quad J(u) = \inf_{v \in V} J(v) . \quad \square$$

Les problèmes de contrôle *linéaires*, à critère quadratique, sans contraintes ([14], [3], [21]) sont du type (1.72) , avec $J(v)$ inférieurement borné par construction. D'après le lemme 1.1, on peut appliquer le Th. 1.2 avec $\theta = 0$, d'où les remarques suivantes :

- Il existe un sur-espace H de V où (1.72) admet une solution au moins (on peut prolonger J à H d'après (1.70)).

- A tout problème du type (1.72) on peut associer une suite de problèmes régularisés du type (1.35), dont les solutions u_ϵ convergent vers une solution (généralisée) de (1.72) ; les u_ϵ forment une suite minimisante pour J (i.e. $J(u_\epsilon) \rightarrow \inf_{v \in V} J(v)$, conséquence de (1.70) et de la convergence des u_ϵ).

- Les problèmes régularisés ne sont pas nécessairement des problèmes de minimum (seulement si $a(u,v)$ est symétrique).

Enfin, adoptant un point de vue légèrement différent, on retrouve l'idée de la *régularisation des contrôles* ([33]). Soit en effet U un espace de Hilbert (ou même de Banach) tel que $V \subset U \subset H$ algébriquement et topologiquement. D'après (1.70), on peut prolonger J à U et poser le problème

$$(1.73) \quad J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

Supposons $\inf J(v) > -\infty$. Alors (1.70) a lieu (lemme 1.1 si V dense dans U , sinon démonstration directe) ; les "contrôles régularisés" u_ϵ convergent vers une solution (généralisée) de (1.73) au sens de H et forment une suite minimisante pour J .

Remarque 1.8. Lorsque (1.70) a lieu , on peut étendre le Théorème 1.2 aux inéquations variationnelles : Si K est un convexe fermé de V , il existe $u_\epsilon \in K$ unique, solution de (1.35) avec $v \in K$, et u_ϵ converge dans H vers un élément u_0 de $\bar{K}$. On peut donc appliquer les remarques précédentes aux problèmes d'optimisation en présence de contraintes. \square

4. QUELQUES VARIANTES DU THEOREME DE CONVERGENCE.

Certaines applications utilisent le th. 1.2 sous des hypothèses moins strictes, d'où l'utilité des variantes qui suivent.

4.1. Second membre variable.

* Peut-on dans (1.19), remplacer f et g par f_ε et g_ε convergeant vers f et g ? *

La situation est celle du §2, mais on remplace (1.35) par

$$(1.74) \quad \pi(u_\varepsilon, v) + \varepsilon a(u_\varepsilon, v) = \langle v_\varepsilon, v \rangle_{V', V} \quad v \in V$$

où v_ε est une fonction de $\varepsilon > 0$ à valeurs dans V' vérifiant

$$(1.75) \quad \left\{ \begin{array}{ll} i) & v_\varepsilon^m \rightarrow u_0^m \quad \text{dans } V_{-\theta} \quad \text{fort} \\ ii) & \varepsilon^{-1} v_\varepsilon^n \rightarrow u_0^n \quad \text{dans } N \end{array} \right.$$

Théorème 1.3. Si (1.21), (1.22), (1.25), (1.75) ont lieu, u_ε solution de (1.74) converge vers $u_0 = u_0^m + u_0^n$ dans $V_{-\theta}$ fort.

En particulier, remplaçons dans (1.35) μ par μ_ε et L par L_ε avec $\mu_\varepsilon \rightarrow \mu$ et $L_\varepsilon \rightarrow L$ dans V' . Alors (1.75) a lieu pour $\theta = 1$.

Démonstration. du Th. 1.3 :

- 1) Soit $v = v^n \in N$ dans (1.74). D'après (1.75, ii) $u_\varepsilon^n \rightarrow u_0^n$.
- 2) Soit $\theta = 1$; posant $v = u_\varepsilon^m - v_\varepsilon^m$ dans (1.74) on a u_ε borné dans V , puis la convergence.
- 3) Si $\theta = -1$, $v = u_\varepsilon$ dans (1.74) montre que $\varepsilon u_\varepsilon$ est borné dans V , etc....(cf. Th. 1.1).
- 4) Posons $u_\varepsilon = \sum_{\varepsilon}^{(1)} v_\varepsilon$. On a, comme plus haut, (1.66) d'après les points 1 et 2. Donc

(1) "Théorème de résonance", cf YOSIDA [34].

$$(1.76) \quad |j_\varepsilon|_{(V_\theta, V_\theta)} \leq \text{cte}$$

donc $u_\varepsilon = j_\varepsilon v_\varepsilon = j_\varepsilon(v_\varepsilon - u_0) + j_\varepsilon u_0$ tend vers u_0 .

4.2. Point de vue opérationnel.

Le résultat qui suit, établi en vue de la section suivante, est indépendant du contexte.

Soit E et F deux espaces de Hilbert séparables, réels, $E \subset F$ avec injection continue et densité, et soit A un isomorphisme de E sur F (par exemple, $E = \text{domaine}(A)$, A opérateur non borné dans F). On fait l'hypothèse suivante :

$$(1.77) \quad (Au, u)_F \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ est un certain ensemble dense dans E .

Etant donné w_ε dans F pour tout $\varepsilon > 0$, on peut poser l'équation :

$$(1.78) \quad u_\varepsilon + \varepsilon Au_\varepsilon = w_\varepsilon$$

On fait l'hypothèse que (1.78) admet une solution unique et que u_ε appartient à $\mathcal{D}$. Alors :

Théorème 1.4. - Si w_ε tend vers u dans F pour $\varepsilon \rightarrow 0$, si (1.77) a lieu, et s'il existe $u_\varepsilon \in \mathcal{D}$ unique solution de (1.78), u_ε converge u vers u dans F .

La Démonstration est immédiate, les hypothèses ayant été choisies pour cela. Multipliant (1.78) à droite par u_ε et Au_ε , on a

$$(1.79) \quad |u_\varepsilon|_F^2 + \varepsilon (Au_\varepsilon, u_\varepsilon)_F = (w_\varepsilon, u_\varepsilon)_F$$

$$(1.80) \quad (u_\varepsilon, Au_\varepsilon)_F + \varepsilon |Au_\varepsilon|^2 = (w_\varepsilon, Au_\varepsilon)$$

donc u_ε et Au_ε restent bornés dans F . On en déduit aisément que $\varepsilon u_\varepsilon$ tend vers 0 dans E faible, donc, multipliant (1.80), par ε , que $\varepsilon Au_\varepsilon$ tend vers 0 dans F fort, d'où le résultat, d'après (1.78). 

4.3. Perturbations sur $\pi(u,v)$ et $a(u,v)$.

* On souhaite, en particulier pour des raisons de *stabilité numérique* pouvoir appliquer les résultats précédents lorsque les *coefficients* a_{ij} * dans (1.6) et/ou la *mesure* et le *domaine d'intégration* dans les termes du type $\int_{\Gamma} uv \, d\Gamma$ dépendent éventuellement de ϵ .

Il est commode de distinguer le cas $N = \{0\}$ du cas général.

Cas où N est réduit à $\{0\}$.

Soit V donné comme au §2, ainsi que $\pi(u,v)$ et $L(v)$. On se donne une famille $\pi_{\epsilon}(u,v)$ de formes bilinéaires continues, avec

$$(1.81) \quad \pi_{\epsilon}(u,u) \geq \alpha(\epsilon) \|u\|^2 \quad \forall u \in V$$

où α est une fonction de $\epsilon > 0$, *strictement positive*, avec $\alpha(\epsilon) \rightarrow 0$. On fait l'hypothèse de consistance suivante (C ne dépend pas de ϵ) :

$$(1.82) \quad |\pi_{\epsilon}(u,v) - \pi(u,v)| \leq C \alpha(\epsilon) \|u\| \|v\|, \quad \forall u,v \in V.$$

Cas général.

Soit $\pi(u,v)$, $a(u,v)$, $L(v)$ donnés comme au §2 et $\pi_{\epsilon}(u,v)$ une famille de formes bilinéaires vérifiant

$$(1.83) \quad \frac{\pi_{\epsilon}(u,v) - \pi(u,v)}{\alpha(\epsilon)} - a(u,v) \leq C \alpha(\epsilon) \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in V.$$

(ce qui entraîne la coercivité de π_{ϵ} si $\epsilon < \epsilon_0$ assez petit).

Les hypothèses ci-dessus étant suffisantes pour que les démonstrations "marchent", on obtient le

Théorème 1.5. - Avec les hypothèses (1.21), (1.22), (1.25) et

i) si $N = \{0\}$, (1.81) et (1.82),

ii) $N \neq \{0\}$, (1.83),

la solution u_ϵ , unique, de

$$(1.84) \quad \pi_\epsilon(u_\epsilon, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

converge dans V' vers l'élément $u_0^m \in V'$ caractérisé par (1.45). 

Remarque 1.9.

Le théorème reste valable

i) si on ajoute $\alpha(\epsilon) a(u, v)$ au second membre de (1.84).

ii) dans les cas "intermédiaires", $u_0 \in V_{-\theta}$.

iii) en le combinant avec le Th. 1.3. 

SECTION 2

ETUDE DES SOLUTIONS REGULARISEES

Cette section est consacrée à l'étude de u_ϵ en fonction de $\epsilon > 0$ et à quelques applications.

Le n°1 donne des estimations de la norme de l'écart $u_\epsilon - u_0$ dans divers espaces où cela a un sens, et des renseignements sur la croissance de u_ϵ dans les espaces où u_ϵ ne reste pas borné. On constate que la convergence est d'autant plus rapide que les données (et par conséquent la solution limite) sont plus régulières.⁽²⁾

Nous avons distingué, pour des raisons techniques, le cas où la forme régularisante $a(u,v)$ est symétrique (n°2) du cas général (n°3). Les résultats se résument à ceci : plus la solution limite est régulière, plus la fonction $\epsilon \mapsto u_\epsilon$ admet de dérivées pour $\epsilon = 0$. Ce fait permet de justifier l'emploi de deux méthodes d'accélération de la convergence. L'une est limitée de Richardson [27], l'autre⁽¹⁾, du type prédicteur-correcteur, revient à approcher u_0 par un développement limité au voisinage de $\epsilon > 0$ fixé.

(1) suggérée par NIVELET [23] pour l'approximation du problème de Dirichlet.

(2) Pour un résultat analogue, dans un contexte différent, cf. PAL'TSEV [24]

1 . EVALUATIONS DE L'ERREUR.

On a déjà obtenu plus haut des renseignements sur le comportement de u_ε et sur l'erreur $u_\varepsilon - u_0$ dans divers espaces (majorations (1.53), (1.59), (1.60) et (1.62)). On va montrer que *la vitesse de convergence est liée à la régularité de la solution u_0* .

1.1 Enoncé du résultat; conséquences.

Le cadre est celui du paragraphe 2, section 2. Pour simplifier l'écriture, on suppose $\mu = 0$, ce qui revient à faire une translation dans V et ne change rien aux résultats. Mais $u_\varepsilon^n = \mu^n$ (cf. dém. du Th. 1.1) donc $u_\varepsilon \in M$, et tout se passe comme si N était réduit à $\{0\}$. On peut donc supprimer les indices m et n et écrire $\pi(u, v) = (u, v)$ (cf. (1.39)). L'équation (1.35), compte tenu de ces simplifications, prend la forme suivante :

$$(2.1) \quad (u_\varepsilon, v) + \varepsilon a(u_\varepsilon, v) = \langle u_0, v \rangle_{V, V} \quad \forall v \in V$$

Le résultat ci-dessous, démontré plus loin dans ce cadre, sera donc établi en toute généralité :

Théorème 2.1 - Si (1.21), (1.22), (1.25) ont lieu et si $L(v)$ est donnée telle que $u_0 \in V_{-\theta}$, $-1 < \theta \leq 1$ ⁽¹⁾, les u_ε tendent vers l'infini dans tous les $V_\tau \subset V_{-\theta}$ selon la loi

$$(2.2) \quad \varepsilon^{(\tau+\theta)/2} |u_\varepsilon|_\tau \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad -\theta < \tau \leq 1$$

et les écarts $u_\varepsilon - u_0$ tendent vers 0 dans tous les $V_\tau \supseteq V_{-\theta}$, plus vite que $\varepsilon^{-(\tau+\theta)/2}$, soit

$$(2.3) \quad \varepsilon^{(\tau+\theta)/2} |u_\varepsilon - u_0|_\tau \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad -1 \leq \tau \leq -\theta.$$

D'après (2.3) la convergence est d'autant plus rapide que u_0 est plus régulière. Dans les espaces où u_ε ne converge pas, sa croissance en est d'autant plus lente. (On démontre aisément une réciproque :

⁽¹⁾ cf. § 3.3, section 1.

si u_ϵ , solution de (2.1) reste borné dans V_τ , $-1 < \tau < 1$, il existe u_0 dans V_τ limite de u_ϵ). Recourons à l'exemple habituel pour illustrer cela :

Tableau 2.1

θ	g donné dans	u_ϵ converge au sens de	(et donc au sens de)
-1	$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$H_A^1 \oplus H_0^1(\Omega)$	$H^1(\Omega)$
0	$L^2(\Gamma)$	$H_A^{1/2} \oplus H_0^1(\Omega)$	$H^{1/2}(\Omega)$
1	$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$L_A^2 \oplus H_0^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$

(*) Exemple 1. Soit $g \in L^2(\Gamma)$ ($\theta = 0$) ; u_ϵ converge dans $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, et

$$(2.4) \quad |u_\epsilon - u_0|_{L^2(\Omega)} < C \sqrt{\epsilon} |g|_{L^2(\Gamma)} \quad (1)$$

Exemple 2. Soit g donné dans $H^{1/2}(\Gamma)$, u_ϵ converge dans $H^1(\Omega)$. Dans $L^2(\Omega)$, on a la majoration suivante ($\theta = -1$, $\tau = -1$) :

$$(2.5) \quad |u_\epsilon - u_0|_{L^2(\Omega)} < C \epsilon |u_0|_{H^1(\Omega)}$$

et, quant aux traces $u_\epsilon|_\Gamma$ ($\theta = -1$, $\tau = 0$), la majoration déjà vue (cf. (1.62)) :

$$(2.6) \quad \left(\int_\Gamma |u_\epsilon - g|^2 \right)^{1/2} < C \sqrt{\epsilon} |u_0|_{H^1(\Omega)} \quad (*)$$

(1) Les "C" désignent des constantes diverses. De façon générale, les résultats obtenus ici sont à des isomorphismes près, et donc toutes les majorations à des constantes multiplicatives près.

1.2 Démonstration du Théorème 2.1

Le résultat découle de deux Lemmes.

Lemme 2.1 - Si u_0 est donné dans $V_{-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$, les convergences suivantes ont lieu

$$(2.7) \quad \varepsilon^{(1+\theta)/2} u_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } V \text{ fort}$$

$$(2.8) \quad \varepsilon^{(-1+\theta)/2} (u_\varepsilon - u_0) \rightarrow 0 \quad \text{dans } V' \text{ fort}$$

Démonstration.

1) Soit $v = u_\varepsilon$ dans (2.1). D'après l'inégalité d'interpolation (1.63), on a

$$(2.9) \quad |u_\varepsilon|_0^2 + \alpha \varepsilon |u_\varepsilon|_1^2 \leq |u_0|_{-\theta} |u_\varepsilon|_0^{1-\theta} |u_\varepsilon|_1^\theta$$

d'où on déduit les majorations a priori

$$(2.10) \quad \varepsilon^{(1+\theta)/2} |u_\varepsilon|_1 \leq \alpha^{-(1+\theta)/2} |u_0|_{-\theta}$$

$$(2.11) \quad \varepsilon^{\theta/2} |u_\varepsilon|_0 \leq \alpha^{-\theta/2} |u_0|_{-\theta}.$$

2) Montrons que $\varepsilon^\theta u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans V_θ faible. Interpolons entre (2.10) et (2.11) :

$$(2.12) \quad \varepsilon^\theta |u_\varepsilon|_\theta \leq \alpha^{-\theta} |u_0|_{-\theta}$$

Après "extraction de sous-suite", on voit, multipliant (2.1) par ε^θ , v fixé, que $\lim \varepsilon^\theta u_\varepsilon = 0$.

3) Soit $v = \varepsilon^\theta u_\varepsilon$ dans (2.1). D'après le point 2, le second membre tend vers zéro, d'où (2.7) en utilisant la coercivité (1.22).

4) Enfin, par définition de la norme dans V' , on a

$$\begin{aligned}
 |u_\varepsilon - u_0|_{-1} &= \sup_{|v|_1 \leq 1} (u_\varepsilon - u_0, v) \\
 &= \sup_{|v|_1 = 1} [-\varepsilon a(u_\varepsilon, v)] \\
 (2.13) \quad &\leq \beta \varepsilon |u_\varepsilon|_1
 \end{aligned}$$

et ce résultat, joint à (2.7), donne (2.8). ▣

Lemme 2.2 - Si u_0 est donné dans $V_{-\theta}$, avec $-1 < \theta \leq 0$, les convergences (2.7) et (2.8) ont lieu.

Démonstration.

La technique est la même que pour $\theta > 0$, avec emploi de (1.64) au lieu de (1.63)

1) Majorations a priori.

Puisque $u_0 \in H$, on peut écrire (2.1) ainsi :

$$(2.14) \quad (u_\varepsilon - u_0, v) + \varepsilon a(u_\varepsilon, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Donc, posant $v = u_\varepsilon$ et appliquant l'inégalité d'interpolation (1.64) :

$$(2.15) \quad |u_\varepsilon - u_0|_0^2 + \alpha \varepsilon |u_\varepsilon|_1^2 \leq |u_0|_{-\theta} |u_\varepsilon - u_0|_0^{1+\theta} |u_\varepsilon - u_0|_{-1}^{-\theta}$$

donc, grâce à (2.13) :

$$(2.16) \quad |u_\varepsilon - u_0|_0^2 + \alpha \varepsilon |u_\varepsilon|_1^2 \leq \varepsilon^{-\theta} \beta^{-\theta} |u_\varepsilon - u_0|_0^{1+\theta} |u_\varepsilon|_1^{-\theta} |u_0|_{-\theta}$$

d'où on déduit

$$(2.17) \quad \varepsilon^{(1+\theta)/2} |u_\varepsilon|_1 \leq \alpha^{-(1-\theta)/2} \beta^{-\theta} |u_0|_{-\theta}$$

$$(2.18) \quad \varepsilon^{\theta/2} |u_\varepsilon - u_0|_0 \leq \alpha^{\theta/2} \beta^{-\theta} |u_0|_{-\theta}$$

2) De (2.13) et (2.17) on déduit

$$(2.19) \quad \varepsilon^{-(1-\theta)/2} |u_\varepsilon - u_0|_{-1} \leq \beta^{1-\theta} \alpha^{-(1-\theta)/2} |u_0|_{-\theta}$$

puis, interpolant entre (2.18) et (2.19)

$$(2.20) \quad \varepsilon^\theta |u_\varepsilon - u_0|_\theta \leq \alpha^\theta \beta^{-2\theta} |u_0|_{-\theta}$$

enfin, comme plus haut, $\varepsilon^\theta (u_\varepsilon - u_0) \rightarrow 0$ dans V_θ faible (si $\theta \neq -1$).

3) Comme ci-dessus, d'où (2.7).

4) Comme ci-dessus, d'où (2.8). ▣

Pour achever la démonstration du Théorème, il suffit de remarquer que $|u_\varepsilon - u_0|_{-\theta} \rightarrow 0$ d'après le Th. 1.2 et de combiner ce résultat, par interpolation, avec (2.7) et (2.8).

1.3 Orientation.

Après avoir exploité le renseignement que constitue la régularité de u_0 , du cas le plus régulier ($u_0 \in V$) au moins régulier ($u_0 \in V'$) il est naturel de chercher au-delà, et en particulier :

- Si u_0 est donné dans $U \subset V$, obtenir le résultat de convergence le plus fin possible.

- Dans le même cas, utiliser l'information supplémentaire pour améliorer les estimations de $u_\varepsilon - u_0$ dans divers espaces. En particulier, améliorer (1.59).

- Etudier la fonction $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ au voisinage de 0. Si par exemple u_ε est suffisamment dérivable, on peut envisager des procédés d'extrapolation et d'accélération de la convergence.

Or ces questions se traitent aisément lorsque la forme $a(u, v)$ est *symétrique*, en diagonalisant l'opérateur associé. C'est pourquoi nous consacrons le § 2 ci-dessous à ce cas. Au § 3 on généralise, autant que possible, les résultats obtenus.

2. ETUDE DE u_ϵ DANS LE CAS $a(u,v)$ SYMETRIQUE.

2.1 Convergence et estimation de l'erreur

Rappelons ⁽¹⁾ quelques éléments de la théorie de la représentation spectrale. Les espaces V et H et la forme bilinéaire symétrique $a(u,v)$ étant donnés comme plus haut, il existe

1) Une mesure de Radon ≥ 0 sur $[\lambda_0, +\infty[$ ⁽²⁾ et une somme mesurable hilbertienne

$$\mathfrak{H} = \int^{\oplus} \mathfrak{H}(\lambda) \, d\mu(\lambda)$$

espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f,g)_{\mathfrak{H}} = \int_{\lambda_0}^{+\infty} (f(\lambda), g(\lambda))_{\mathfrak{H}(\lambda)} \, d\mu(\lambda) \quad ,$$

2) Une correspondance $u \rightarrow \hat{u} (= \lambda \rightarrow \hat{u}(\lambda)) \in \mathfrak{H}$ de H dans $\mathfrak{H}$ telle que, si $u, v \in V$

$$(u,v) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} (\hat{u}(\lambda), \hat{v}(\lambda))_{\mathfrak{H}(\lambda)} \, d\mu(\lambda)$$

$$a(u,v) = \int_{\lambda_0}^{\infty} (\lambda \hat{u}(\lambda), \lambda \hat{v}(\lambda))_{\mathfrak{H}(\lambda)} \, d\mu(\lambda)$$

On peut alors, pour tout θ réel, considérer l'ensemble des $u \in V$ tels que

$$(2.21) \quad \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2\theta} \|\hat{u}(\lambda)\|_{\mathfrak{H}(\lambda)}^2 \, d\mu(\lambda) < \infty$$

et l'Hilbert V_θ qui s'en déduit par complétion, avec la norme (2.21).

(1) Voir [8], [16]. Ce rappel n'a pour but que de fixer les notations utilisées plus loin.

(2) $\lambda_0 > 0$.

On démontre ([16]) que les V_θ ainsi définis coïncident pour $-1 \leq \theta \leq 1$ avec les espaces d'interpolation introduits plus haut (§ 3.3, section 1).

Dans ce cadre, à l'équation (2.1) correspond l'égalité suivante pour presque tout $\lambda \in [\lambda_0, \infty[$:

$$(2.22) \quad \hat{u}_\varepsilon(\lambda) = (1 + \varepsilon \lambda^2)^{-1} \hat{u}_0(\lambda)$$

On démontre alors le résultat suivant (ce qui remplit les deux premiers points du programme du § 1.3) :

Théorème 2.2 - Soit (1.21), (1.22), (1.25) et supposons $a(u, v)$ symétrique. Si $L(v)$ est donnée telle que $u_0 \in V_{-\theta}$, θ réel quelconque, u_ε converge vers u_0 dans $V_{-\theta}$ et les quantités

$$(2.23) \quad \varepsilon^{(\tau+\theta)/2} |u_\varepsilon|_\tau \quad \text{si} \quad -\theta < \tau \leq 2 - \theta$$

$$(2.24) \quad \varepsilon^{(\tau+\theta)/2} |u_\varepsilon - u_0|_\tau \quad \text{si} \quad -\theta - 2 \leq \tau \leq -\theta$$

tendent vers zéro avec ε .

Démonstration.

1) Soit d'abord $\tau > -\theta$. On a, cherchant à majorer $|u_\varepsilon|_\tau$:

$$\left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2\tau} \|\hat{u}_\varepsilon(\lambda)\|_{\mathfrak{D}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2} = \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\lambda^{2(\tau+\theta)}}{(1+\varepsilon\lambda^2)^{\tau+\theta}} \frac{\lambda^{-2\theta}}{(1+\varepsilon\lambda^2)^{2-(\tau+\theta)}} \|\hat{u}_0(\lambda)\|^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2}$$

$$\leq \varepsilon^{-(\tau+\theta)/2} |u_0|_{-\theta} \quad \text{si} \quad \tau + \theta \leq 2.$$

Le premier membre n'est autre que $|u_\varepsilon|_\tau$; (2.23) est donc borné. Or, d'après (2.22), $\lambda^\tau \varepsilon^{(\tau+\theta)/2} \hat{u}_\varepsilon(\lambda) \rightarrow 0$ p.p. en λ , donc $\varepsilon^{(\tau+\theta)/2} |u_\varepsilon|_\tau \rightarrow 0$.

2) Soit $\tau > -\theta$. On applique la même technique à $u_\varepsilon - u_0$.

3) Quant à la convergence, $\hat{u}_\varepsilon(\lambda) \rightarrow \hat{u}_0(\lambda)$ p.p., d'où le résultat d'après le Théorème de Lebesgue et la majoration précédente. ▨

Remarque 2.1.

On supposera toujours $\theta \leq 1$ pour rester dans le cas où l'équation (2.1) a un sens. ▨

(*) Exemple.

Soit A symétrique dans (1.15), (1.19). On supposera ici, pour séparer les difficultés, $f = 0$ (i.e. $\mu = 0$).

Les V_θ sont les espaces

$$(2.25) \quad V_\theta = H^{\theta/2}(\Gamma) \oplus H_0^1(\Omega) \simeq H_A^{(1+\theta)/2} \oplus H_0^1(\Omega)$$

et $u_0 \in V_{-\theta}$ signifie $g \in H^{-\theta/2}(\Gamma)$. Les u_ε convergent vers u_0 au sens de $H^{(1-\theta)/2}(\Omega)$, soit dans la topologie la plus fine possible. Par exemple :

- Si $\theta = -2$, $u_0 \in H^{3/2}(\Omega)$, et l'on obtient entre autres majorations, d'après (2.24) :

$$(2.26) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \sqrt{\varepsilon} |g|_{H^1(\Gamma)}$$

à comparer à (1.59). Si $\theta = -3$, $u_0 \in H^{-2}(\Omega)$, et

$$(2.27) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} < C \varepsilon |g|_{H^{3/2}(\Gamma)}$$

- Si $\theta = -4$, (2.24) ne vaut plus pour $\tau = 1$ et (2.27) ne peut être amélioré. On voit que la régularité reste inexploitée au-delà de $\theta = -3$; pour en tirer parti, on doit recourir aux procédés d'accélération de la convergence décrits ci-dessous. (*)

2.2 Accélération de la convergence par la méthode de Richardson ⁽¹⁾

Soit $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ deux paramètres différents et u_{ε_1} , u_{ε_2} les solutions correspondantes de (2.1). Suivant Richardson, nous posons

$$(2.28) \quad v_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_1 u_{\varepsilon_2} - \varepsilon_2 u_{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}$$

auquel correspond

$$(2.29) \quad \hat{v}_{\varepsilon}(\lambda) = \frac{1 + \lambda^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(1 + \varepsilon_1 \lambda^2)(1 + \varepsilon_2 \lambda^2)} \hat{u}_0(\lambda) .$$

Montrons que v_{ε} constitue une meilleure approximation de u_0 que u_{ε_1} ou u_{ε_2} . Comme ci-dessus, on suppose $u_0 \in V_{-\theta}$, $\theta \leq 1$ fixé, et on évalue $|v_{\varepsilon} - u_0|_{\tau}$, $\tau \leq -\theta$ à choisir ultérieurement. On a :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{2\tau} \|\hat{u}_0(\lambda) - \hat{v}_{\varepsilon}(\lambda)\|_{\mathfrak{H}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2} &= \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} \frac{\lambda^{2(\tau+\theta+4)} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}{(1 + \varepsilon_1 \lambda^2)^2 (1 + \varepsilon_2 \lambda^2)^2} \lambda^{-2\theta} \|\hat{u}_0(\lambda)\|_{\mathfrak{H}(\lambda)}^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\lambda_0}^{\infty} A(\lambda) B(\lambda) \lambda^{-2\theta} \|\hat{u}_0(\lambda)\|^2 d\mu(\lambda) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

avec

$$A(\lambda) = \frac{\lambda^{2(\tau+\theta+4)} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2}{(1 + \varepsilon_1 \lambda^2)^{\rho(\tau+\theta+4)} (1 + \varepsilon_2 \lambda^2)^{(1-\rho)(\tau+\theta+4)}}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{(1 + \varepsilon_1 \lambda^2)^{2-\rho(\tau+\theta+4)} (1 + \varepsilon_2 \lambda^2)^{2-(1-\rho)(\tau+\theta+4)}}$$

où ρ , $0 \leq \rho \leq 1$ est un paramètre à choisir "au mieux". On majore

⁽¹⁾ cf. [27], [28], [10] et la bibliographie de ce dernier travail.

aisément $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ à condition que

$$(2.30) \quad \tau + \theta + 4 \geq 0$$

$$(2.31) \quad \tau + \theta + 4 \leq \inf (2/\rho, 2/(1-\rho)) .$$

Dans ce cas, la discussion sur ρ conduit aux majorations optimales suivantes :

$$(2.32) \quad |u - v_\varepsilon|_\tau \leq \varepsilon_1^{-\frac{\tau+\theta}{2}} |u_0|_{-\theta} \quad \text{si} \quad -(\theta+2) \leq \tau \leq -\theta$$

$$(2.33) \quad |u - v_\varepsilon|_\tau \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2^{-\frac{\tau+\theta+2}{2}} |u_0|_{-\theta} \quad \text{si} \quad -(\theta+4) \leq \tau \leq -(\theta+2)$$

$$(2.34) \quad |u - v_\varepsilon|_\tau \leq \varepsilon_1 \varepsilon_2 |u_0|_{-\theta} \quad \text{si} \quad \tau \leq -(\theta+4)$$

C'est la majoration (2.33) qui constitue le gain attendu, comme on va le voir en reprenant l'exemple précédent.

(*) Exemple. On cherche toujours les majorations dans $H^1(\Omega)$, soit $\tau = 1$.

Tableau 2.2

θ	g est dans	v_ε converge dans	et l'on a, dans $H^1(\Omega)$, la majoration
-2	$H^1(\Gamma)$	$H^{3/2}(\Omega)$	$\ v_\varepsilon - u_0\ \leq C \sqrt{\varepsilon_1} g _{H^1(\Gamma)}$
-4	$H^2(\Gamma)$	$H^{5/2}(\Omega)$	$\ v_\varepsilon - u_0\ \leq C \varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2} g _{H^2(\Gamma)}$
-5	$H^{5/2}(\Gamma)$	$H^3(\Omega)$	$\ v_\varepsilon - u_0\ \leq C \varepsilon_1 \varepsilon_2 g _{H^{5/2}(\Gamma)}$

Au-delà de $\theta = -5$, pas d'amélioration supplémentaire.

(*)

Pour tirer parti d'une régularité plus grande, on peut généraliser ce qui précède à n indices ε .

Remarque 2.2 - (d'ordre numérique). Pour calculer u_ε , on introduit diverses discrétisations caractérisées par un paramètre h , dit "pas", choisi assez petit pour ne pas aggraver l'erreur "systématique" $\|u_\varepsilon - u_0\|$. Or h est lié à ε , (cf. [2], [23]). Comparant par exemple (2.27) et la dernière ligne du tableau 2.2, on voit que la méthode de Richardson diminue l'erreur systématique donc *autorise l'emploi d'un pas plus grand*, ce qui compense largement la double résolution de (2.1). 

2.3 Accélération de la convergence. Développement limité de u_ε au voisinage de ε .

Cette méthode est issue de la remarque suivante :

Proposition 2.1 - La fonction $\varepsilon \mapsto u_\varepsilon$, où u_ε est solution de (2.1) admet des dérivées de tous les ordres, au voisinage de $\varepsilon_0 > 0$ quelconque.

Démonstration.

Un calcul *formel* montre que les images des dérivées $u_\varepsilon^{(k)}$ sont, pour tout k entier > 0 :

$$(2.35) \quad \hat{u}_\varepsilon^{(k)}(\lambda) = (-1)^k k! \frac{\lambda^{2k}}{(1 + \varepsilon \lambda^2)^{k+1}} \hat{u}_0(\lambda)$$

On vérifie ensuite que $(\hat{u}_\varepsilon^{(k-1)} - \hat{u}_{\varepsilon'}^{(k-1)}) / (\varepsilon - \varepsilon')$ converge vers $\hat{u}_\varepsilon^{(k)}$, quand $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon$, par majoration et application du Th. de Lebesgue, comme plus haut, Th. 2.2. 

Remarque 2.3. Les dérivées vérifient les équations variationnelles suivantes :

$$(2.36) \quad \pi(u'_\varepsilon, v) + \varepsilon a(u'_\varepsilon, v) = a(u, v) - a(u_\varepsilon, v) \quad \forall v \in V,$$

$$(2.37) \quad \pi(u_{\varepsilon}^{(k)}, v) + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^{(k)}, v) = -k a(u_{\varepsilon}^{(k-1)}, v) \quad \forall v \in V$$

si $k > 1$. Vérification à partir de (2.35). ▣

Il est donc loisible de poser

$$(2.38) \quad u_{\varepsilon}^k = u_{\varepsilon} - \varepsilon u'_{\varepsilon} + \dots + (-1)^k \frac{\varepsilon^k}{k!} u_{\varepsilon}^{(k)}$$

et d'en attendre une meilleure approximation de u_0 . Effectivement :

Théorème 2.3. *Hypothèses du théorème 2.2. Si $L(v)$ et μ sont donnés tels que $u_0 \in V_{-\theta}$, les u_{ε}^k donnés par la récurrence :*

$$(2.39) \quad \pi(u_{\varepsilon}, v) + \varepsilon a(u_{\varepsilon}, v) = L(v) + \varepsilon a(\mu, v) \quad \forall v \in V$$

$$(2.40) \quad \pi(u_{\varepsilon}^k, v) + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^k, v) = L(v) + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^{k-1}, v) \quad \forall v \in V$$

convergent, pour $\varepsilon \rightarrow 0$, vers u_0 dans $V_{-\theta}$ et vérifient les majorations suivantes

$$(2.41) \quad |u_{\varepsilon}^k - u_0|_{\tau} \leq \varepsilon^{-(\tau+\theta)/2} |u_0|_{-\theta}$$

pour tout τ tel que

$$(2.42) \quad -\theta \geq \tau \geq -\theta - 2(k+1) \quad .$$

Démonstration :

D'après (2.35) et (2.38), l'image de u_{ε}^k est

$$(2.43) \quad \hat{u}_{\varepsilon}^k(\lambda) = \left[1 - \left(\frac{\varepsilon \lambda^2}{1 + \varepsilon \lambda^2} \right)^{k+1} \right] \hat{u}_0(\lambda)$$

d'où (2.41) par un calcul dont le principe a été donné plus haut. ▣

Remarque 2.4.

De même que par la méthode de Richardson, on a ici le moyen d'exploiter la régularité des données. La Remarque 2.2 peut être reprise intégralement. L'inconvénient de la présente méthode est son caractère récurrent, alors que la méthode de Richardson permet le calcul *simultané* des u_{ε_i} . Cet inconvénient est en partie compensé par le fait que la matrice correspondant, après discrétisation, au premier membre de (2.39) reste inchangée pour les résolutions suivantes. ▨

(*) Exemple. Soit A symétrique et f assez régulier (p. ex. $f \in \mathcal{D}(\Omega)$).

Les équations correspondant à (2.39) - (2.40) sont :

$$(2.44) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon} v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}, v) = \int_{\Gamma} gv + \varepsilon \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$(2.45) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon}^k v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^k, v) = \int_{\Gamma} gv + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^{k-1}, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

En pratique,

- On "discrétise" (2.44) et on résout le système linéaire résultant.

- Usant du même réseau de discrétisation, on résout l'une des trois équations suivantes :

$$(2.46) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon}^1 v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^1, v) = \int_{\Gamma} gv + \varepsilon a(u_{\varepsilon}, v) \quad \forall v \in V$$

$$(2.47) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon}^1 v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^1, v) = \int_{\Gamma} gv + \varepsilon \int_{\Omega} fv + \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu_A} v$$

$$(2.48) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon}^1 v + \varepsilon a(u_{\varepsilon}^1, v) = 2 \int_{\Gamma} gv + \varepsilon \int_{\Omega} fv - \int_{\Gamma} u_{\varepsilon} v \quad \forall v \in V.$$

- On réitère pour obtenir u_{ε}^2 , etc...

On voit qu'il s'agit d'une suite de systèmes linéaires, où seul le second membre change en fonction du résultat du calcul précédent. Les trois équations ci-dessus sont équivalentes (d'après la formule de Green) mais correspondent à des techniques numériques différentes. La version employée dans [23] est (2.47).

(*)

2.4 Remarques sur le développement en série. Une méthode itérative.

Considérons la série à valeurs dans $V_{2-\theta}$ (ϵ est fixé) :

$$(2.49) \quad S(z) = u_\epsilon - z u'_\epsilon + \frac{z^2}{2!} u''_\epsilon + \dots + (-1)^k \frac{z^k}{k!} u^{(k)}_\epsilon + \dots$$

et cherchons son rayon de convergence. Le terme général est

$s_k = (-1)^k / k! u^{(k)}_\epsilon$ auquel correspond

$$(2.50) \quad \hat{s}_k(\lambda) = \frac{\lambda^{2k}}{(1 + \epsilon \lambda^2)^{k+1}} \hat{u}_0(\lambda)$$

Après majoration et application du Th. de Lebesgue, on obtient.

$$(2.51) \quad R(\epsilon) = \limsup \sqrt[k]{|s_k|_\tau} = \epsilon$$

si $\tau \leq 2 - \theta$. Le rayon de convergence est donc ϵ dans tous les V_τ tels que $\tau \leq 2 - \theta$. Il est naturel d'examiner le comportement de $S(z)$ sur le cercle de convergence ($z = \epsilon$). Cela revient à chercher si les u^k_ϵ du Th. 2.3 convergent, à ϵ fixé, pour $k \rightarrow \infty$. A ce sujet, on a le

Théorème 2.4 - Hypothèses du Théorème 2.2. La suite $\{u^k_\epsilon\}$ donnée par

(2.39) - (2.40) avec $\epsilon > 0$ fixé converge faiblement vers u_0 dans $V_{-\theta}$ et, si $u_0 \in V$, fortement dans V .

Démonstration.

On supprime l'indice ϵ pour simplifier.

1) D'après (2.41), u^k reste borné dans $V_{-\theta}$. Soit w tel que $u^k \rightarrow w$ dans $V_{-\theta}$ faible. D'après (2.40), $w = u_0$, et la convergence faible a lieu.

2) Supposons démontré le Lemme suivant :

Lemme 2.3. - On a, pour tout entier k :

$$(2.52) \quad a(u^k - u_0, u^k - u_0) = a(-u_0, u^{2k+1} u_0)$$



Si $u_0 \in V$, $u^{2k+1} \rightarrow u_0$ dans V faible. Le second membre de (2.52) tend vers zéro, d'où la convergence forte, et le théorème.

3) Démonstration du Lemme.

Il suffit de calculer séparément les deux membres de (2.52) en tenant compte de (2.43) et de l'expression de $a(u, v)$ donnée p.33.



Remarque 2.5.

Le théorème 2.4 n'est pas valable *après discrétisation* : la méthode itérative converge bien, mais vers une solution *approchée*; il convient d'arrêter le processus à l'ordre k , fixé en fonction de la régularité, conformément à (2.42). En dimension finie, le Th. 2.4 est connu : cf. [25], [28], [29].

3. ETUDE DE u_ϵ DANS LE CAS GENERAL.

L'étude locale de u_ϵ au voisinage de zéro fournira les renseignements nécessaires à la généralisation des résultats du § 2. Il faut tout d'abord définir une suite d'espaces analogues aux V_0 .

3.1 Cadre fonctionnel.

Rappelons que $V = M \oplus N$ avec la relation (1.38). Considérons l'opérateur non borné $\mathcal{A}$ dans $\hat{M}$, de domaine $D(\mathcal{A})$, défini par :

$$(2.56) \quad D(\mathcal{A}) = \{u \mid u \in M, v \rightarrow a(u,v) \text{ continu sur } V \text{ pour la topologie induite par } H\}.$$

$$(2.57) \quad (\mathcal{A} u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V.$$

(ou, ce qui est équivalent, puisque les topologies induites par V et H sur N coïncident :

$$(2.58) \quad D(\mathcal{A}) = \{u \mid u \in M, v \rightarrow a(u,v) \text{ continu sur } M \text{ pour } H\})$$

Remarque 2.6.

Si $u \in M$, $a(u, v^n) = 0 \quad \forall v^n \in N$. Or, par définition,
 $(\mathcal{A} u, v) = \pi((\mathcal{A} u)^m, v^m) + ((\mathcal{A} u)^n, v^n)$. Donc, d'après (2.57),
 $(\mathcal{A} u)^n = 0$, et (2.57) s'écrit de façon équivalente :

$$(2.59) \quad \pi(\mathcal{A} u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V$$



Rappelons (cf. [12], chap. 2) que $\mathcal{A}$ est fermé, de domaine $D(\mathcal{A})$ dense dans M , et établit un isomorphisme entre $\hat{M}$ et $D(\mathcal{A})$ muni de la norme du graphe. Prolongeons $\mathcal{A}$ en un opérateur non borné sur V :

$$(2.60) \quad u = u^m + u^n \rightarrow \mathcal{A} u^m + u^n = \mathcal{A} u.$$

L'application (2.60) est un isomorphisme entre H et l'espace (dense dans V)

$$(2.61) \quad V_2 = D(\mathcal{A}) \oplus N$$

muni du produit scalaire

$$(2.62) \quad \begin{aligned} (u, v)_2 &= (u^m, v^m)_{D(\mathcal{A})} + ((u^n, v^n)) \\ &= \pi(\mathcal{A} u^m, \mathcal{A} v^m) + ((u^n, v^n)) \end{aligned}$$

De même l'opérateur

$$(2.63) \quad D(\mathfrak{a}^*) = \{u \mid u \in M, v \rightarrow a(v, u) \text{ continu sur } V \text{ pour } H\}$$

$$(2.64) \quad \pi(\mathfrak{a}^* u, v) = a(v, u) \quad \forall v \in V$$

est un isomorphisme de $D(\mathfrak{a}^*)$ sur M . On montre ([12]) que $\mathfrak{a}^*$ est l'adjoint de $\mathfrak{a}$. Son prolongement $\mathfrak{a}^*$, défini comme en (2.60), est de même un isomorphisme entre H et

$$(2.65) \quad V_2^* = D(\mathfrak{a}^*) \oplus N.$$

On démontre ([12]) que $\mathfrak{a}$ [resp. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}^*$, $\mathfrak{a}^*$] se prolonge en un isomorphisme de M sur M' [resp. de V sur V' , de M sur M' , de V sur V']. Transposons maintenant l'isomorphisme $\mathfrak{a}^*$. Puisque $\mathfrak{a}^* \in \mathcal{L}(V_2^*, H)$ on a $(\mathfrak{a}^*)^* \in \mathcal{L}(H', (V_2^*)')$. Mais H est identifié à H' , d'où la situation suivante :

$$V_2^* \subset V \subset H \subset V' \subset (V_2^*)' \quad \text{noté } V_{-2}$$

avec densité et injections continues. On peut donc considérer la restriction de $(\mathfrak{a}^*)^*$ à V , qui coïncide avec $\mathfrak{a}$, d'après (2.64) et la définition de l'adjoint.

On a donc la situation suivante :

$$V_2 \subset V \subset H \subset V' \subset V_{-2}$$

où chaque espace est dense dans le suivant, avec injection continue, avec isomorphisme $\mathfrak{a}$ de V_2 [resp. V , H] sur H [resp. V' , V_{-2}].

On obtient enfin le cadre fonctionnel souhaité, soit une suite d'espaces de Hilbert

$$(2.66) \quad \subset V_{2k+1} \subset V_{2k} \subset \dots \subset V_2 \subset V \subset H \subset V' \subset V_{-2} \subset \dots \subset V_{-2k} \subset \dots$$

chacun dense dans le suivant, avec injection continue, isomorphes de 2 en 2 par l'opérateur $\mathfrak{a}$ (confondu avec ses prolongements), en introduisant les puissances $\mathfrak{a}^n$ de $\mathfrak{a}$ et leurs domaines $D(\mathfrak{a}^n)$ et

$$(2.67) \quad D(\alpha^n; V) = \{u \mid u \in D(\alpha^n), \alpha^n u \in M\}$$

puis les espaces V_{2n} et V_{2n+1} correspondants, avec des produits scalaires analogues à (2.62), et en transposant comme ci-dessus

(*) Exemple.

Cherchons d'abord $D(\alpha)$. Si $u \in M$, $Au = 0$, et la formule de Green s'écrit, pour tout $v \in H^1(\Omega)$:

$$(2.68) \quad \alpha(u, v) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_A} v \, d\Gamma$$

La définition (2.56) est donc équivalente à

$$(2.69) \quad D(\alpha) = \{u \mid u \in H^1(\Omega), Au = 0, \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \in L^2(\Gamma)\}$$

et on explicite α en comparant (2.59) et (2.68) :

$$(2.70) \quad \alpha u \mid_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu_A}$$

Comme par ailleurs

$$(2.71) \quad A(\alpha u) = 0$$

l'opérateur α est défini par la résolution du problème de Dirichlet (2.70) - (2.71).

D'après [15], $D(\alpha)$ est isomorphe à $H_A^{3/2}$, comme conséquence de l'isomorphisme entre $L^2(\Gamma)$ et $H_A^{3/2}$.

On vérifie de même que

$$(2.72) \quad V_k = H_A^{(k+1)/2} \oplus H_0^1(\Omega)$$

et que α^* est défini par

$$(2.73) \quad D(\alpha^*) = \{u \mid u \in H^1, \frac{\partial u}{\partial \nu_{A^*}} \in L^2(\Gamma)\}$$

$$(2.74) \quad \text{i) } A^*(u^*u) = 0, \quad \text{ii) } u^*u|_{\Gamma} = \frac{\partial u}{\partial \nu}_{A^*}$$

d'où $D(u^*) = H_{A^*}^{3/2}$ et $V_k^* = H_{A^*}^{(k+1)/2} \oplus H_0^1(\Omega)$. Transposant, on achève la construction de la suite (2.67), soit :

$$(2.75) \quad H_A^{(k+1)/2} \oplus H_0^1(\Omega) \subset \dots \subset H^1(\Omega) \subset H_A^{1/2} \oplus H_0^1(\Omega) \subset \dots \\ \dots \subset L_A^2(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega) \subset \dots \subset (H_{A^*}^{(-k+1)/2})^* \oplus H_0^1(\Omega) \subset \dots \quad (*)$$

3.2 Existence des dérivées pour $\epsilon > 0$.

Soit u_ϵ solution de

$$(2.76) \quad \pi(u_\epsilon, v) + \epsilon a(u_\epsilon, v) = \langle u_0, v \rangle + \epsilon a(u, v) \quad \forall v \in V.$$

Proposition 2.2. - Si (1.21), (1.22), (1.25) ont lieu, la fonction

$\{\epsilon \mapsto u_\epsilon\}$ admet pour $\epsilon > 0$ des dérivées de tous ordres, solution de (2.36) - (2.37).

Démonstration.

Soit u'_ϵ la solution de (2.36); divisant

$$(2.77) \quad \pi(u_{\epsilon+d\epsilon} - u_\epsilon, v) + \epsilon a(u_{\epsilon+d\epsilon} - u_\epsilon, v) = d\epsilon a(u - u_{\epsilon+d\epsilon}, v)$$

(où $0 < |d\epsilon| < \epsilon$) par $d\epsilon$ et retranchant (2.36), il reste au second membre $a(u_{\epsilon+d\epsilon} - u_\epsilon, v)$. Il suffit, d'après le Théorème 1.3 de montrer que ce terme tend vers 0 uniformément en v , pour avoir le résultat. C'est l'objet du

Lemme 2.4. - u_ϵ est continue en ϵ en tout point $\epsilon_0 > 0$.

En effet, soit $\epsilon_0 > 0$ fixé; on modifie (2.76) comme suit

$$\underbrace{\pi(u_\varepsilon, v) + \varepsilon_0 a(u_\varepsilon, v) + (\varepsilon - \varepsilon_0) a(u_\varepsilon, v)}_{\bar{w}(u_\varepsilon, v)} = \underbrace{\langle u_0, v \rangle + \varepsilon_0 a(\mu, v) + (\varepsilon - \varepsilon_0) a(\mu, v)}_{l(v)} \quad \forall v \in V$$

Retranchant de chaque côté $\bar{w}(u_{\varepsilon_0}, v) = l(v)$

$$(2.78) \quad \bar{w}(u_\varepsilon - u_0, v) = (\varepsilon - \varepsilon_0) a(\mu - u_\varepsilon, v) \quad \forall v \in V.$$

Or d'après (1.53), u_ε reste borné si, par exemple $\varepsilon > \varepsilon_0/2$; donc le second membre de (2.78) tend vers zéro avec $\varepsilon - \varepsilon_0$, d'où la convergence faible de u_ε vers u_0 , puis la convergence forte grâce à la coercivité de $\bar{w}$. Ceci achève la démonstration du Lemme et de la Proposition. ▣

3.3 Continuité de u'_ε pour $\varepsilon = 0$. Application.

Remarquons d'abord que si $u_0 \in V$, u_ε tend vers u_0 , donc $\mathcal{U} u_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U} u_0$ dans V' . D'après (2.36) et le Théorème 1.3, u'_ε converge dans V' vers (rappelons que $\mu - u_0 \in M$)

$$(2.79) \quad u'_0 = \mathcal{U}(\mu - u_0) \in V'.$$

La dérivée u'_ε est donc continue à valeurs dans V' ; avec une hypothèse de régularité supplémentaire, on obtient la continuité dans V :

Proposition 2.3. - Si $\mu - u_0 \in D(\mathcal{U}; V)$, u'_ε tend vers u'_0 dans V fort.

En effet $w_\varepsilon = (u_\varepsilon - u_0)/\varepsilon$ vérifie l'équation

$$(2.80) \quad \pi(w_\varepsilon, v) + \varepsilon a(w_\varepsilon, v) = a(\mu - u_0, v) = \langle \mathcal{U}(\mu - u_0), v \rangle$$

donc w_ε tend vers u'_0 dans V (proposition 1.1) et $u_\varepsilon \in V$ est dérivable en 0.

Or, $w_\varepsilon - u'_\varepsilon$ vérifie

$$(2.81) \quad \pi(w_\varepsilon - u'_\varepsilon, v) + \varepsilon \alpha(w_\varepsilon - u'_\varepsilon, v) = \varepsilon \alpha(w_\varepsilon, v) \quad \forall v \in V;$$

donc tend vers zéro (Théorème 1.3). ▣

Remarque 2.7.

On a $|w_\varepsilon|_1 \leq \alpha^{-1} \beta |u'_0|_1$ (d'après (1.59)), donc

$$(2.82) \quad |u_\varepsilon - u_0|_1 \leq \varepsilon \alpha^{-1} \beta |u'_0|_1$$

à comparer à (1.59). La régularité a permis de gagner le facteur ε .
D'autre part, posant $v = w_\varepsilon - u'_\varepsilon$ dans (2.81) on obtient

$$(2.83) \quad |u'_\varepsilon|_1 \leq \alpha^{-1} \beta |w_\varepsilon|_1 \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} |u'_0|_1$$
▣

(*) Exemple.

L'hypothèse $\mu - u_0 \in D(\mathcal{A}; V)$ signifie que

$$(2.84) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_A} (\mu - u_0) \in H^{1/2}(\Gamma)$$

d'après (2.67). Dans (2.84) interviennent à la fois f et g . On peut séparer les hypothèses de régularité sur f et g comme suit. La condition (2.84) équivaut, puisque $u_0^n = \mu^n$ à $\frac{\partial}{\partial \nu_A} (\mu^m - u_0^m) \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Or μ^m est solution de

$$(2.85) \quad \text{i) } A \mu^m = 0, \quad \text{ii) } \frac{\partial}{\partial \nu_A} \mu^m = - \frac{\partial}{\partial \nu_A} \mu^n$$

d'après (1.31). On obtient donc la condition suivante

$$\frac{\partial}{\partial \nu_A} u_0^m + \frac{\partial}{\partial \nu_A} \mu^n \in H^{1/2}(\Gamma)$$

où u_0^m ne dépend que de g et μ^n de f . Les données f et g étant indépendantes, il faut s'assurer que $\frac{\partial}{\partial \nu_A} u_0^m \in H^{1/2}(\Gamma)$, soit

$$(2.86) \quad g \in H^{3/2}(\Gamma)$$

et que $\frac{\partial}{\partial \nu_A} \mu^n \in H^{1/2}(\Gamma)$, ce qui a lieu si (cf. [16]).

$$(2.87) \quad f \in L^2(\Omega)$$

La proposition 2.3 montre que, si (2.86) et (2.87) ont lieu, la solution u_ε de (1.19), à valeurs dans V , admet une dérivée à droite en 0, u'_0 , telle que :

$$(2.88) \quad \text{i) } A u'_0 = 0, \quad \text{ii) } u'_0|_\Gamma = -\frac{\partial}{\partial \nu_A} u_0$$

C'est bien le résultat de la dérivation formelle de (1.19). A (2.82) correspond la majoration suivante, obtenue plus haut (cf. (2.27)) dans le cas symétrique :

$$(2.89) \quad |u_\varepsilon - u_0|_{H^1(\Omega)} \leq \varepsilon \alpha^{-1} \beta |u'_0|_{H^1(\Omega)}. \quad (*)$$

3.4 Dérivées d'ordre supérieur.

Théorème 2.5. - Si (1.21), (1.22), (1.25) ont lieu et si μ et L sont donnés tels que $\mu - u_0 \in D(\mathcal{U}^k; V)$, les dérivées $u_\varepsilon^{(i)}$ de u_ε en ε , données par (2.36) - (2.37) sont continues à droite dans V pour $i \leq k$, dans V' pour $i = k + 1$, et

$$(2.90) \quad u_0^{(i)} = (-1)^i i! \mathcal{U}^i (\mu - u_0)$$

Démonstration.

Posons

$$w_\varepsilon^{1,1} = (u_\varepsilon - u_0) / \varepsilon,$$

$$w_\varepsilon^{1,2} = 2(w_\varepsilon^{1,1} - u'_0) / \varepsilon, \quad w_\varepsilon^{2,2} = (u'_\varepsilon - u') / \varepsilon,$$

et ainsi de suite :

$$w_{\epsilon}^{1,k} = k(w_{\epsilon}^{1,k-1} - u_0^{(k-1)})/\epsilon, \dots, w_{\epsilon}^{i,k} = (k-i+1)(w_{\epsilon}^{i,k-1} - u_0^{(k-1)})/\epsilon, \dots,$$

$$w_{\epsilon}^{k,k} = (u_{\epsilon}^{(k-1)} - u_0^{(k-1)})/\epsilon,$$

soit, sous forme plus explicite,

$$(2.91) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\epsilon} = u_0 + \epsilon u'_0 + \dots + \frac{\epsilon^{k-1}}{(k-1)!} u_0^{(k-1)} + \frac{\epsilon^k}{k!} w_{\epsilon}^{1,k}, \dots, \\ \dots\dots\dots \\ u_{\epsilon}^{(i)} = u_0^{(i)} + \epsilon u_0^{(i+1)} + \dots + \frac{\epsilon^{k-1-i}}{(k-1-i)!} u_0^{(k-1)} + \frac{\epsilon^{k-i}}{(k-i)!} w_{\epsilon}^{i+1,k}, \dots, \\ \dots\dots\dots \\ u_{\epsilon}^{(k-1)} = u_0^{(k-1)} + \epsilon w_{\epsilon}^{k,k} \end{array} \right.$$

Il faut démontrer que $u_0^{(k)} = \lim w_{\epsilon}^{k,k}$ dans V , car s'il en est ainsi, $u_0^{(k)} = \lim u_{\epsilon}^{(k)}$ dans V grâce à la Proposition 1.1 appliquée à (2.37), et le Théorème suit. Il suffira donc de prouver, par récurrence, que

$$(2.92) \quad u_0^{(k)} = \lim w_{\epsilon}^{i,k}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Or $u'_0 = \lim w_{\epsilon}^{1,1}$ (Proposition 2.3). Soit donc, par hypothèse :

$$(2.93) \quad u_0^{(k-1)} = \lim w_{\epsilon}^{i,k-1}, \quad i = 1; \dots, m-1.$$

Les $w_{\epsilon}^{i,k}$ vérifient les équations suivantes

$$(2.94) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi(w_{\epsilon}^{1,k}, v) + \epsilon a(w_{\epsilon}^{1,k}, v) = -k a(u_0^{(k-1)}, v) \\ \pi(w_{\epsilon}^{2,k}, v) + \epsilon a(w_{\epsilon}^{2,k}, v) = -k a(u_0^{(k-1)}, v) - \frac{1}{k} \epsilon a(w_{\epsilon}^{1,k}, v) \\ \dots\dots\dots \\ \pi(w_{\epsilon}^{i,k}, v) + \epsilon a(w_{\epsilon}^{i,k}, v) = -k a(u_0^{(k-1)}, v) - \frac{i-1}{(k-i+2)} \epsilon a(w_{\epsilon}^{i-1,k}, v) \\ \dots\dots\dots \\ \pi(w_{\epsilon}^{k,k}, v) + \epsilon a(w_{\epsilon}^{k,k}, v) = -k a(u_0^{(k-1)}, v) - \frac{k-1}{2} \epsilon a(w_{\epsilon}^{k-1,k}, v) \end{array} \right.$$

pour tout $v \in V$, d'après (2.90) et (2.91).

Appliquant la Proposition 1.1 à chaque ligne de (2.94) successivement, on obtient $u_0^{(k)} = \lim_{\varepsilon} w_{\varepsilon}^{i,k}$ dans V quelque soit $i \leq k$, c'est à dire (2.92). Ceci achève la récurrence et la démonstration. ▨

Il y a évidemment d'autres énoncés de ce résultat, selon l'espace de référence. En particulier, le Théorème reste valable en changeant V en H et $D(\mathcal{A}^k; V)$ en $D(\mathcal{A}^k)$.

On vient d'obtenir la convergence des dérivées dans V . Ce n'est le résultat optimal que pour $u_{\varepsilon}^{(k)}$. En fait :

Corollaire 2.1. Avec les hypothèses du Th. 2.5, les dérivées $u_{\varepsilon}^{(i)}$ convergent vers $u_0^{(i)}$ au sens de $V_{2(k-i)+1}$.

Démonstration.

Compte tenu de (2.59), l'équation (2.37) s'écrit

$$(2.95) \quad u_{\varepsilon}^{(k)} + \varepsilon \mathcal{A} u_{\varepsilon}^{(k)} = -k \mathcal{A} u_{\varepsilon}^{(k-1)}$$

dans l'espace V (par exemple). D'après le théorème, $u_{\varepsilon}^{(k)}$ converge dans V , donc $\mathcal{A} u_{\varepsilon}^{(k-1)}$ converge vers $-k^{-1} u_0^{(k)}$; $\mathcal{A}$ étant un isomorphisme, ceci entraîne la convergence de $u_{\varepsilon}^{(k-1)}$ vers $u_0^{(k-1)}$ (d'après (2.90)) au sens de V_3 , et ainsi de suite jusqu'à $i = 0$. Pour $i > k$, on applique le Théorème 1.5. ▨

En particulier, on a la convergence de u_{ε} dans V_{2k+1} , ce qui est le résultat optimal (cf. § 1.3).

(*) Exemple.

L'hypothèse $\mu - u_0 \in D(\mathcal{A}^k; V)$ [resp. $\mu - u_0 \in D(\mathcal{A}^k)$] signifie, pour $k > 2$,

$$(2.96) \quad g \in H^{k+1/2}(\Gamma) \quad , \quad f \in H^{k-1}(\Omega) \quad [\text{resp.}$$

$$(2.96)' \quad g \in H^k(\Gamma) \quad , \quad f \in H^{k-3/2}(\Omega) .]$$

d'après (2.70) - (2.71) et les résultats de régularité habituels [16] .
Les dérivées successives de u_ε convergent vers les $u_0^{(k)}$ solution de
(2.88) et

$$(2.97) \quad \text{i) } A u_0^{(k)} = 0 \quad \text{ii) } u_0^{(k)}|_\Gamma = -k \frac{\partial}{\partial \nu_A} u_0^{(k-1)} \quad (*)$$

3.5 Accélération de la convergence.

La validité des procédés d'accélération envisagés plus haut résulte de Corollaires immédiats du Th. 2.5. Tout d'abord, le procédé de Richardson, dans le cadre où l'on s'est placé plus haut. Soit $u_0 \in V_5$, espace de référence V ; $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, u_{ε_1} et u_{ε_2} solutions correspondantes.

On a les développements limités suivants, d'après (2.91)

$$(2.98) \quad u_{\varepsilon_1} = u_0 + \varepsilon_1 u'_0 + \frac{\varepsilon_1^2}{2} u''_0 + \frac{\varepsilon_1^3}{3!} w_{\varepsilon_1}^{1,3}$$

$$(2.99) \quad u_{\varepsilon_2} = u_0 + \varepsilon_2 u'_0 + \frac{\varepsilon_2^2}{2} u''_0 + \frac{\varepsilon_2^3}{3!} w_{\varepsilon_2}^{1,3}$$

Les termes $\varepsilon_i w_{\varepsilon_i}^{1,3}$ ($i=1,2$) tendent vers zéro dans V . Donc :

$$(2.100) \quad v_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 u_{\varepsilon_1} - \varepsilon_1 u_{\varepsilon_2}}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = u_0 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 u''_0 + o(\varepsilon_1 \varepsilon_2)$$

d'où la majoration (2.34) dans le cas présent.

Plus généralement, on a le

Corollaire 2.2. Avec les hypothèses du Th. 2.5, $\varepsilon w_\varepsilon^{1,k+1}$ tend vers 0 dans V fort.

(Immédiat d'après (2.94), première ligne)



d'où le résultat suivant :

Proposition 2.4. - Soit λ_i , $i = 1, \dots, k$ les solutions du système (de Vandermonde).

$$(2.101) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \varepsilon_i^r = 0, \quad r = 1, \dots, k-1, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

où les ε_i sont k réels positifs tels que $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_k$, et posons:

$$(2.102) \quad v_{\varepsilon}^k = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_{\varepsilon_i}$$

où les u_{ε_i} sont les solutions de (2.76) pour $\varepsilon = \varepsilon_i$. On a, sous les hypothèses du Théorème 2.5, la majoration suivante :

$$(2.103) \quad |v_{\varepsilon}^k - u_0|_1 < C \left(\prod_{i=1}^k \varepsilon_i \right) |u_0^{(k)}|_1$$

En effet, écrivant u_{ε_i} sous la forme

$$(2.104) \quad u_{\varepsilon_i} = u_0 + \varepsilon_i u'_0 + \dots + \frac{\varepsilon_i^k}{k!} u_0^{(k)} + \frac{\varepsilon_i^{k+1}}{(k+1)!} w_{\varepsilon_i}^{1,k}$$

on voit que tous les $u_0^{(r)}$, $1 \leq r < k$, disparaissent dans (2.102). Il reste, compte tenu du Corollaire 2.2 et des propriétés des systèmes de Vandermonde

$$(2.105) \quad v_{\varepsilon}^k = u_0 - \left(\prod_{i=1}^k \varepsilon_i \right) u_0^{(k)} + o\left(\prod_{i=1}^k \varepsilon_i \right)$$



Pour le calcul des λ_i , on dispose de formules explicites, dont la stabilité numérique est satisfaisante. (cf. [18]).

Quant au second procédé d'accélération, il est justifié par le

Corollaire 2.3. Avec les hypothèses du Th. 2.5, les quantités suivantes tendent vers zéro :

$$(2.106) \quad \varepsilon^{-k} (u_{\varepsilon}^k - u_0) \quad \text{dans } V$$

$$(2.107) \quad \varepsilon^{-(k+1)} (u_\varepsilon^{k+1} - u_0) \quad \text{dans } V'$$

$$(2.108) \quad \varepsilon^{-i} (u_\varepsilon^i - u_0) \quad \text{dans } V_{2(k-i)}, \quad i \text{ entier quelconque.}$$

Démontrons seulement (2.106). On a, d'après (2.91)

$$\begin{aligned} (2.109) \quad u_\varepsilon^k &= u_\varepsilon - \varepsilon u'_\varepsilon + \dots + (-1)^k \frac{\varepsilon^k}{k!} u_\varepsilon^{(k)} \\ &= u_0 + \frac{\varepsilon^k}{k!} [w_\varepsilon^{1,k} - C_k^1 w_\varepsilon^{2,k} + \dots + (-1)^k C_k^{k-1} w_\varepsilon^{k,k} + (-1)^k u_\varepsilon^{(k)}] \end{aligned}$$

et tous les $w_\varepsilon^{i,k}$ ont même limite $u_0^{(k)}$ dans V , donc le terme entre crochets tend vers zéro dans V . 

(*) Exemple.

On peut se reporter aux exemples du § 2, avec A non nécessairement symétrique, et la condition (2.96) imposée à f . (*)

Remarque 2.8.

On s'est limité aux cas "entiers". On peut généraliser aux cas "fractionnaires" ($u_0 \in V_\theta$), si nécessaire, par interpolation. 

SECTION 3

APPLICATIONS

Soit Ω un ouvert borné régulier et $a(u,v)$ une forme bilinéaire équivalente au produit scalaire usuel sur $H^m(\Omega)$.

Nous envisageons ici trois types de situation :

- 1) $\pi(u,v)$ est une forme intégrale "sur Γ ". On approche alors certains problèmes aux limites non homogènes (n°1).
- 2) $\pi(u,v)$ est une forme intégrale sur un sous-ouvert de Ω : on retrouve la méthode du domaine auxiliaire, avec quelques gains dans les majorations (n°2).
- 3) $\pi(u,v)$ est une forme équivalente au produit scalaire usuel sur $H^{m'}(\Omega)$ avec $m' < m$. C'est la situation rencontrée à propos de certains problèmes de perturbation singulière (D. HUET [9]). Nous obtenons des résultats de convergence qui semblent nouveaux (n°3).

1 . QUELQUES PROBLEMES AUX LIMITES NON HOMOGENES ELLIPTIQUES D'ORDRE 4.

La démarche exposée au N° 1.2, Section 1, s'adapte à d'autres situations. Parmi les conditions aux limites d'un problème variationnel, certaines, prises en compte par la formulation variationnelle (conditions "naturelles") peuvent être non-homogènes, d'autres (conditions "stables" imposées par le choix de l'espace de Hilbert de référence, sont nécessairement homogènes. La méthode de régularisation permet de traiter des conditions *stables non homogènes*.

Les convergences démontrées ayant lieu au sens des V_θ de la théorie générale, il importe que ces espaces soient identifiés à (ou immergés dans) des espaces usuels. Ceci n'est pas toujours possible.

Nous donnerons un exemple type, sur l'opérateur biharmonique, puis d'autres exemples voisins, et enfin un cas où les V_θ ne sont pas connus pour situer les limites du procédé.

1.1 Un exemple relatif à Δ^2 . (Exemple 1)

Rappelons ([16], [20]) que l'opérateur $-\Delta$ est un isomorphisme de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sur $L^2(\Omega)$. (où Ω est un ouvert borné régulier de R^n). Il en résulte que la forme bilinéaire continue

$$(3.1) \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx$$

peut être prise comme produit scalaire standard sur $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (noté pour simplifier H_Y^2) où elle définit une topologie équivalente à la topologie induite par $H^2(\Omega)$. A fortiori, $a(u,v)$ est coercive sur $H_0^2(\Omega)$, donc le problème variationnel

$$\int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^2$$

avec $f \in H^{-2}(\Omega)$ admet une solution unique, qui vérifie

$$(3.2) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & u|_{\Gamma} = 0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

problème avec deux conditions aux limites stables. Nous allons approcher un problème analogue à (3.2) avec iii) *non homogène*. Pour cela, soit $V = H_{\gamma}$, $a(u, v)$ la forme (3.1) et

$$(3.3) \quad \pi(u, v) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} d\Gamma,$$

forme bilinéaire continue (d'après les théorèmes de trace dans $H^2(\Omega)$). Posons

$$(3.4) \quad L(v) = \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial n}, \quad g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et soit μ la solution unique dans H_{γ} de

$$(3.5) \quad \int_{\Omega} \Delta \mu \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{\gamma}$$

avec $f \in \Xi^{-2}(\Omega)$, dual de $\Xi^2(\Omega)$ ⁽¹⁾. (En fait, il suffit de $f \in L^2(\Omega)$, ou de $f \in H^{-1}(\Omega)$.) On pose le problème variationnel régularisé :

$$(3.7) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon} \Delta v = \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial n} + \varepsilon \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{\gamma}$$

(1) Rappelons que si ρ désigne la fonction "distance à Γ " dans Ω , et Ξ^m , m entier, l'espace

$$(3.6) \quad \Xi^m(\Omega) = \{u | \rho^{|\alpha|} D^{\alpha} u \in L^2(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \sum_{i=1}^n \alpha_i = |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme hilbertienne naturelle, $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $\Xi^m(\Omega)$; donc $\Xi^{-m}(\Omega)$ est un espace de distributions (cf. [16]). $H^2(\Omega) \subset \Xi^2(\Omega)$, donc (3.5) a un sens.

D'après la formule de Green

$$(3.8) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v = \int_{\Omega} \Delta^2 u v + \int_{\Gamma} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) v$$

(valable pour u et $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, et plus généralement lorsque les intégrales ont un sens dans (3.8)), le problème (3.7) est équivalent à

$$(3.9) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_{\varepsilon} = f & \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & u_{\varepsilon}|_{\Gamma} = 0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} + \varepsilon \Delta u_{\varepsilon} = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On va vérifier, à l'aide de la théorie générale, la

Proposition 3.1. - Si $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ [resp. $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, resp. $H^{\frac{\theta}{2}}(\Gamma)$, $-1 < \theta < 1$] la solution u_{ε} de (3.7) - (3.9) converge au sens de $H^1(\Omega)$ [resp. au sens de $H^2(\Omega)$, resp. de $H^{(3+\theta)/2}(\Omega)$] vers u_0 solution de

$$(3.10) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_0 = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{ii)} & u_0|_{\Gamma} = 0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_0}{\partial n} = g \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma,$$

Démonstration.

Il s'agit d'identifier les V_0 et d'expliciter u_0 . Or l'espace N est ici $H_0^2(\Omega)$, donc M est l'ensemble

$$(3.11) \quad M = \{u \mid u \in H_Y^2, \Delta^2 u = 0\}$$

et son complété $\hat{M}$ s'identifie, par un raisonnement déjà fait ⁽¹⁾ à

⁽¹⁾ et moyennant certains résultats de régularité. Cf. [16].

$$(3.12) \quad H_{\gamma, \Delta^2}^{3/2} = \{u \mid u \in H^{3/2}(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\} \sim L^2(\Gamma)$$

sous espace de $H^{3/2}(\Omega)$. Donc $H = H_{\gamma, \Delta^2}^{3/2} \oplus H_0^2(\Omega) \subset H^{3/2}(\Omega)$.

On vérifie de même que $V' \subset H^1(\Omega)$ et $V_\theta \subset H^{(3+\theta)/2}(\Omega)$.

Quant à u_0 notons d'abord que u_0^m vérifie

$$(3.13) \quad \text{i) } \Delta^2 u_0^m = 0, \quad \text{ii) } u_0^m|_{\Gamma} = 0, \quad \text{iii) } \frac{\partial u_0^m}{\partial n}|_{\Gamma} = g,$$

et μ^n (appliquer (3.8) à (3.5)) :

$$(3.14) \quad \text{i) } \Delta^2 \mu^n = f, \quad \text{ii) } \mu^n|_{\Gamma} = 0, \quad \text{iii) } \frac{\partial \mu^n}{\partial n} = 0,$$

d'où (3.10) en rapprochant (3.13) et (3.14).

Le Théorème 2.2 permet d'obtenir diverses estimations de l'erreur.

Par exemple : si $g \in L^2(\Gamma)$, $|u_\epsilon - u_0|_{H^1(\Omega)} \sim C \sqrt{\epsilon}$, etc...

Enfin, le Théorème 2.3 donne, selon la régularité de u_0 , des estimations d'erreur concernant les u_ϵ^k du N° 2.3, Section 2.

Rappelons que u_ϵ^1 est solution de

$$(3.15) \quad \begin{cases} \text{i) } \Delta^2 u_\epsilon^1 = f, & \text{ii) } u_\epsilon^1|_{\Gamma} = 0 \\ \text{iii) } \frac{\partial u_\epsilon^1}{\partial n} + \epsilon \Delta u_\epsilon^1 = g + \epsilon \Delta u_\epsilon \end{cases}$$

puis u_ϵ^2 solution de (3.11) en remplaçant u_ϵ par u_ϵ^1 , etc...

Le tableau ci-dessous résume les résultats.

Tableau 3.1

$- \theta =$	$- 1$	0	1	2	3	4	etc
Si f est pris dans	$\Xi^{-2}(\Omega)$	$\Xi^{-2}(\Omega)$	$\Xi^{-2}(\Omega)$	$\Xi^{-\frac{3}{2}}(\Omega)$	$H^{-1}(\Omega)$	$H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$	...
et g dans	$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$L^2(\Gamma)$	$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	$H^1(\Gamma)$	$H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$	$H^2(\Gamma)$	...
u_0 appartient à	$H_0^1(\Omega)$ ($=V'$)	$H^{\frac{3}{2}} \cap H_0^1$ ($=H$)	H_γ^2 ($=V$)	V_2	V_3	V_4	...
et $u_\epsilon \rightarrow u_0$ au sens de	$H_0^1(\Omega)$	$H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$	$H^2(\Omega)$	$H^{\frac{5}{2}}(\Omega)$	$H^3(\Omega)$	$H^{\frac{7}{2}}(\Omega)$	..
Soit u_ϵ^k avec $k =$	0 ($u_\epsilon^0 = u_\epsilon$)	0	0	1	1	2	..
Alors $ u_\epsilon^k - u_0 _{H^2(\Omega)} \sim$	-	-	-	$O(\sqrt{\epsilon})$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon\sqrt{\epsilon})$	..
$ u_\epsilon - u_0 _{H^1(\Omega)} \sim$	-	-	$O(\sqrt{\epsilon})$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon\sqrt{\epsilon})$	$O(\epsilon^2)$	..
et $ u_\epsilon^k - u_0 _{L^2(\Omega)} \sim$	-	$O(\sqrt{\epsilon})$	$O(\epsilon)$	$O(\epsilon\sqrt{\epsilon})$	$O(\epsilon^2)$	$O(\epsilon^2\sqrt{\epsilon})$	..
etc...							

1.2 Un exemple relatif à $\Delta^2 + 1$, (Exemple 2)

L'espace de référence est maintenant

$$(3.16) \quad H_{\partial}^2 = \{u \mid u \in H^2(\Omega) , \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0\}$$

muni du produit scalaire

$$(3.17) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v + \int_{\Omega} uv$$

équivalent au produit scalaire standard de $H^2(\Omega)$, du fait de l'isomorphisme $(\Delta + 1)$ entre H_{∂}^2 et $L^2(\Omega)$. Soit

$$(3.18) \quad \pi(u, v) = \int_{\Gamma} uv \, d\Gamma$$

$$(3.19) \quad L(v) = \int_{\Gamma} gv \, d\Gamma , \quad g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$

et μ la solution unique dans H_{∂}^2 de

$$(3.20) \quad \int_{\Omega} \Delta \mu \Delta v + \int_{\Omega} \mu v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{\partial}$$

avec $f \in \mathcal{H}^{-2}(\Omega)$ comme précédemment. L'équation régularisée est

$$(3.21) \quad \int_{\Gamma} u_{\varepsilon} v + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon} \Delta v + \varepsilon \int_{\Omega} u_{\varepsilon} v = \int_{\Gamma} gv + \varepsilon \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_{\partial}$$

équivalente d'après (3.8) à

$$(3.22) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_{\varepsilon} + u_{\varepsilon} = f \\ \text{ii)} & (u_{\varepsilon} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\Delta u_{\varepsilon})) \Big|_{\Gamma} = g , \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2. - Si $g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$

[resp. $H^{3\theta/2}(\Gamma)$, $-1 < \theta < 1$] la solution u_ε de (3.17) - (3.18) converge dans $H^{-1}(\Omega)$ [resp. $H^2(\Omega)$, resp. $H^{(1+3\theta)/2}(\Omega)$] vers u_0 solution de

$$(3.23) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_0 + u_0 = f \\ \text{ii)} & u_0|_\Gamma = g \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_0}{\partial n}|_\Gamma = 0 \end{cases}$$



C'est une conséquence du Théorème 1.1. L'espace N est $H_0^2(\Omega)$, et

$$(3.24) \quad M = \{u \mid u \in H_0^2, (\Delta^2 + 1)u = 0\}$$

Le complété de M s'identifie à

$$(3.25) \quad H_{\partial, \Delta^2+1}^{1/2} = \{u \mid u \in H^{1/2}(\Omega), \Delta^2 u + u = 0, \frac{\partial u}{\partial n} = 0\} \sim L^2(\Gamma)$$

d'où $H \subset H^{1/2}(\Omega)$. De même $V' \subset H^{-1}(\Omega)$.

Un exemple d'application du Théorème 2.3 : Si $g \in L^2(\Gamma)$, on a

$$(3.26) \quad \|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2(\Omega)} < C \varepsilon^{\frac{1}{6}} \|g\|_{L^2(\Gamma)}.$$

On pourrait dresser un tableau analogue au Tableau 3.1

1.3 Exemples relatifs à $\Delta^2 + 1$ avec une seule condition stable.

L'espace de référence est ici $H^2(\Omega)$. On suppose Ω assez régulier pour que la forme bilinéaire

$$(3.27) \quad a(u, v) = \sum_{i,j} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

soit équivalente au produit scalaire standard dans Ω (cf. [11]). Bien que l'opérateur correspondant à (3.27) soit encore $\Delta^2 + 1$, la formule de Green fait intervenir d'autres conditions aux limites :

$$(3.28) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} (\Delta^2 u + u)v + \int_{\Gamma} (S(u) - \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u))v + \int_{\Gamma} T(u) \frac{\partial v}{\partial n}$$

où $S(u)$ et $T(u)$ sont des opérateurs différentiels sur Γ d'ordre 3 et 2 respectivement.

On traitera simultanément deux cas. (Exemples 3 et 4). Posons

$$(3.29) \quad \pi(u, v) = \int_{\Gamma} uv \, d\Gamma \quad [\text{resp.} \quad = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma]$$

$$(3.30) \quad L(v) = \int_{\Gamma} gv \, d\Gamma \quad [\text{resp.} \quad = \int_{\Gamma} h \frac{\partial v}{\partial n} \, d\Gamma]$$

$$(3.31) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} h \frac{\partial v}{\partial n} \quad [\text{resp.} \quad = \int_{\Omega} fv + \int_{\Gamma} gv]$$

avec

$$(3.32) \quad f \in \Xi^{-2}(\Omega) \quad , \quad g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \quad , \quad h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \quad .$$

L'équation régularisée est

$$(3.33) \quad \int_{\Gamma} u_{\epsilon} v + \epsilon a(u_{\epsilon}, v) = \int_{\Gamma} gv + \epsilon \int_{\Omega} fv + \epsilon \int_{\Gamma} h \frac{\partial v}{\partial n}$$

$$[\text{resp.} \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} + \epsilon a(u_{\epsilon}, v) = \int_{\Gamma} h \frac{\partial v}{\partial n} + \epsilon \int_{\Omega} fv + \epsilon \int_{\Gamma} gv]$$

La solution u_{ϵ} vérifie, d'après (3.16) :

$$(3.34) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_\varepsilon + u_\varepsilon = f \\ \text{ii)} & u_\varepsilon + \varepsilon(S(u_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u_\varepsilon)) = g \quad \text{sur } \Gamma \quad [\text{resp. } \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon T(u_\varepsilon)] \\ \text{iii)} & T(u_\varepsilon) = h \quad \text{sur } \Gamma \quad [\text{resp. } S(u_\varepsilon) - \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u_\varepsilon) = g] \end{cases}$$

L'espace N est ici H_Y^2 [resp. H_∂^2] ; l'espace M se compose des u tels que :

$$(3.35) \quad a(u, v) = 0 \quad \forall v \in H_Y^2 \quad [\text{resp. } H_\partial^2]$$

c'est à dire, d'après (3.28)

$$(3.36) \quad M = \{u \mid u \in H^2(\Omega), (\Delta^2 + 1)u = 0 \text{ dans } \Omega, T(u) = 0 \\ [\text{resp. } S(u) - \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u) = 0]\}$$

isomorphe à l'espace de traces correspondant sur Γ , soit $H^{3/2}(\Gamma)$ [resp. $H^{1/2}(\Gamma)$].

Raisonnant comme précédemment, on vérifie que $H \subset H^{1/2}(\Omega)$ [resp. $\subset H^{3/2}(\Omega)$] et $V' \subset H^1(\Omega)$ [resp. $V' \subset H^{-1}(\Omega)$], ce qui permet d'interpréter les résultats de convergence, analogues à ceux énoncés plus haut. La solution limite est u_0 vérifiant

$$(3.37) \quad \begin{cases} \text{i)} & \Delta^2 u_0 + u_0 = f \\ \text{ii)} & u_0|_\Gamma = g \quad [\text{resp. } \frac{\partial u_0}{\partial n}|_\Gamma = h] \\ \text{iii)} & T(u_0)|_\Gamma = h \quad [\text{resp. } S(u_0) - \frac{\partial}{\partial n}(\Delta u_0) = g \quad \text{sur } \Gamma] \end{cases}$$

où ii) est la condition stable, non homogène, et iii) la condition naturelle.

Tout ceci pouvant s'étendre à une forme $a(u, v)$ non symétrique, nous

donnons ci-dessous la caractérisation de l'opérateur $\mathcal{A}$. Par définition

$$D(\mathcal{A}) = \{u \mid u \in M, v \rightarrow \mathcal{A}(u, v) \text{ continu pour la topologie de } H\}$$

Or d'après (3.28) et (3.36), si $u \in M$

$$(3.38) \quad \mathcal{A}(u, v) = \int_{\Gamma} (S(u) - \frac{\partial}{\partial n} \Delta u) v \quad [\text{resp.} \quad = \int_{\Gamma} T(u) \frac{\partial v}{\partial n}]$$

d'où la solution

$$(3.39) \quad u \in D(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \{u \in M, S(u) - \frac{\partial}{\partial n} \Delta u|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma) \quad [\text{resp.} \quad T(u) \in L^2(\Gamma)]\}$$

Expliciter $\mathcal{A}$ revient à résoudre pour u donné avec (3.36) :

$$(3.40) \quad \begin{cases} \text{i)} & (\Delta^2 + 1) \mathcal{A} u = 0 \\ \text{ii)} & \mathcal{A} u|_{\Gamma} = S(u) - \frac{\partial}{\partial n} \Delta u \quad [\text{resp.} \quad = T(u)] \\ \text{iii)} & T(u) = 0 \quad [\text{resp.} \quad S(u) - \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u) = 0] \end{cases}$$

1.4 Un exemple avec deux conditions stables.

Avec $V = H^2(\Omega)$ et $\mathcal{A}(u, v)$ comme en (3.27), posons

$$(3.41) \quad \pi(u, v) = \int_{\Gamma} uv + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n}$$

Le problème régularisé correspondant est

$$(3.42) \quad \begin{cases} \text{i)} & (\Delta^2 + 1) u_{\epsilon} = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & u_{\epsilon} + \epsilon (S(u_{\epsilon}) - \frac{\partial}{\partial n} (\Delta u_{\epsilon})) = g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial n} + \epsilon T(u_{\epsilon}) = h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{cases}$$

Faute de connaître le complété de M pour la norme (3.41), on ne peut appliquer les résultats généraux. Toutefois certains résultats subsistent :

convergence de $u_\varepsilon|_\Gamma$ vers g dans $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et de $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}|_\Gamma$ vers h dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, et, si $g \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $h \in H^{1/2}(\Gamma)$, convergence vers u_0 au sens de $H^2(\Omega)$.

2 - SUR LA METHODE "DU DOMAINE AUXILIAIRE".

Le principe de la méthode du domaine auxiliaire (cf. [19] et la bibliographie de ce travail) consiste à approcher un problème aux limites donné par un problème analogue dans un ouvert plus grand, d'une géométrie plus simple. C'est en fait un procédé de régularisation. On établira, sur un exemple, diverses majorations de l'erreur.

2.1 Notations et rappel de la méthode.

Soit D un ouvert borné régulier et R^n tel que (figure 3.1) :

$$(3.43) \quad D = \Omega \cup \Sigma \cup \omega$$

où Σ est la portion de frontière commune à Ω et ω . On suppose les ouverts Ω et ω suffisamment réguliers (d'où quelques conditions de raccordement de Σ à $\Gamma \cup \gamma$).

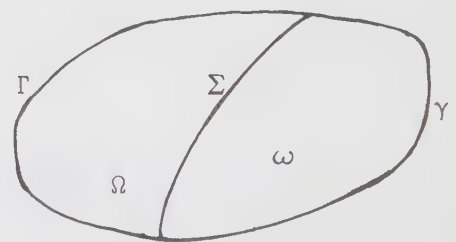


Figure 3.1

On note

$$(3.44) \quad V = H_0^1(D)$$

et on considère le problème de Dirichlet dans Ω , soit (notations du N° 1.1, Section 1) :

$$(3.45) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

problème variationnel équivalent à

$$(3.46) \quad \text{i) } Au = f \text{ dans } \Omega, \quad \text{ii) } u|_{\Gamma \cup \Sigma} = 0.$$

On suppose qu'il existe un *prolongement* $\tilde{a}(u, v)$ de $a(u, v)$ à D tel que $\tilde{a}(u, v)$ soit bilinéaire continue *coercive* sur $H_0^1(D)$.

Par exemple :

$$(3.47) \quad \tilde{a}(u, v) = a(u|_{\Omega}, v|_{\Omega}) + \int_{\omega} \text{grad } u|_{\omega} \text{grad } v|_{\omega}.$$

De même, on suppose qu'il existe $\tilde{f} \in H^{-1}(D)$ tel que $\tilde{f}$ soit la restriction de $\tilde{f}$ à Ω (ce qui implique $f \in H^{-1}(\Omega)$).

Posons

$$(3.48) \quad \pi(u, v) = \int_{\omega} \text{grad } u \text{grad } v$$

Alors l'espace N comprend les fonctions de $H_0^1(D)$ nulles sur ω , soit

$$(3.49) \quad N = H_0^1(\Omega)$$

(avec un léger abus de notations). L'espace M se caractérise par :

$$(3.50) \quad \begin{aligned} M &= \{u \mid u \in H_0^1(D), \tilde{a}(u, v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega)\} \\ &= \{u \mid u \in H_0^1(D), Au = 0 \text{ dans } \Omega\} \end{aligned}$$

Tout élément de M est donc connu si sa restriction à ω est donnée; en effet, cela revient à se donner $u|_{\Sigma} \in H^{1/2}(\Sigma)$ d'où u dans Ω tout entier d'après (3.50) (problème mixte). La topologie de M est donc définie par restriction à ω . Or, d'après (3.48), la topologie induite par $V = H_0^1(D)$ et celle définie par $\pi(u, v)$ coïncident. Donc les espaces V, H, V' et tous les V_θ considérés plus haut coïncident. Cette situation, particulière à la méthode du domaine auxiliaire, a des conséquences avantageuses quant aux majorations d'erreur.

Le problème régularisé est

$$(3.51) \quad \pi(u_\epsilon, v) + \epsilon a(u_\epsilon, v) = \epsilon \int_D \tilde{f} v \quad \forall v \in H_0^1(D)$$

équivalent à

$$(3.52) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & Au_\epsilon = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & -\Delta u_\epsilon = \epsilon \tilde{f} \quad \text{dans } \omega \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu_\omega} + \epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial \nu_\Omega} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \\ \text{iv)} & u_\epsilon|_{\Gamma \cup \gamma} = 0 \end{array} \right.$$

où $\frac{\partial}{\partial \nu_\omega}$ et $\frac{\partial}{\partial \nu_\Omega}$ désignent les "dérivées normales" (cf. (1.10)) dans ω et Ω . (L'équation (3.51) n'a pas la forme générale (1.35) mais on s'y ramène en posant $\epsilon' = \epsilon/(1 - \epsilon)$.)

2.2 Convergence et estimations de l'erreur.

Proposition 3.3. - La solution u_ϵ du problème de transmission (3.52) converge dans $H^1(\Omega)$ vers u_0 solution de (3.45).

C'est une conséquence du Théorème 1.1 : Il suffit d'expliciter $\mu^n = u_0$, Or, d'après (3.51), μ^n est solution de

$$(3.53) \quad a(\mu^n, v) = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

qui n'est autre que (3.45). ▨

Puisque tous les V_θ coïncident avec V , toutes les dérivées $u_0^{(k)}$ existent, En particulier, $(u_\varepsilon - u_0)/\varepsilon$ admet une limite dans V , donc :

$$(3.54) \quad |u_\varepsilon - u_0|_{H^1(D)} < C \varepsilon$$

sans hypothèse sur f autre que $f \in H^{-1}(D)$. Cette majoration contient en particulier les suivantes :

$$(3.55) \quad |u_\varepsilon|_{\Omega} - u_0|_{H^1(\Omega)} < C \varepsilon$$

$$(3.56) \quad |u_\varepsilon|_{\Sigma} |_{H^{1/2}(\Sigma)} < C \varepsilon$$

et, si $f \in L^2(\Omega)$ (car $\tilde{f}|_{\omega} = 0$ est alors loisible) :

$$(3.57) \quad |u_\varepsilon|_{\omega} |_{H^1(\omega)} < C \varepsilon$$

Remarque 3.1. Dans les trois majorations précédentes, on gagne un facteur $\sqrt{\varepsilon}$ par rapport à [19]. ▨

Remarque 3.2. Accélération de la convergence : on peut calculer tous les u_ε^k , sans autre hypothèse, obtenant des majorations en ε^k , k arbitraire. ▨

3 - PERTURBATION SINGULIERE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES.

Etant donnés deux opérateurs différentiels A et B , avec ordre de A supérieur à ordre de B , et u_ε solution d'un problème aux limites relatif à $(\varepsilon A + B) u_\varepsilon = f$ dans Ω , on étudie le comportement de u_ε lorsque ε tend vers 0. ⁽¹⁾

Dans tous les exemples ci-dessous, u_ε tend vers u_0 dans V' . On note $((u, v))$ [resp. $((u, v))_0$] le produit scalaire habituel dans $H^1(\Omega)$ [resp. $H_0^1(\Omega)$], soit

$$(3.58) \quad ((u, v)) = ((u, v))_0 + \int_{\Omega} uv \, dx = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} D_i u \, D_i v \, dx + \int_{\Omega} uv \, dx$$

Pour la notation H_Y^2 et H_0^2 , voir le N° 1.1. La forme $a(u, v)$ est généralement le produit scalaire naturel sur V . Dans tous les exemples qui suivent, le sous-espace N est réduit à $\{0\}$.

3.1 L'espace V est $H_0^2(\Omega)$.

Exemple 1. Si $V = H_0^2(\Omega)$, et si

$$(3.59) \quad \pi(u, v) = ((u, v))_0 \quad \forall u, v \in V$$

l'espace H est $H_0^1(\Omega)$. Alors $V' = L^2 /_{L_\Delta^2}$ quotient de L^2 par l'ensemble des fonctions harmoniques de $L^2(\Omega)$. Démontrons d'abord le

Lemme 3.2. - Si $H_0^1(\Omega)$ est identifié à son dual, le dual de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ s'identifie à $L^2(\Omega)$.

⁽¹⁾ Voir D. HUET [9].

En effet il y a isomorphisme entre $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ par l'intermédiaire de $-\Delta$, donc toute forme linéaire continue sur $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ s'écrit de manière unique, avec $u \in L^2(\Omega)$

$$(3.60) \quad \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(-\Delta v)$$

Or, si $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, $\langle u, v \rangle = \pi(u, v)$ d'après la formule de Green. $\square$

D'après un théorème classique ([5], Chap. 4) $(H_0^2)'$ s'identifie au quotient de L^2 par le polaire $(H_0^2)^\circ$ de H_0^2 dans L^2 soit

$$(3.61) \quad (H_0^2)^\circ = \{u \mid \int_{\Omega} u(-\Delta v) = 0 \quad \forall v \in H_0^2\}$$

c'est à dire L_{Δ}^2 , d'où $V' = L^2/L_{\Delta}^2$.

Passons au problème régularisé. C'est, sous forme variationnelle :

$$(3.62) \quad ((u, v))_0 + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon} \Delta v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^2$$

où $f \in H^{-2}(\Omega)$. Sous forme opérationnelle :

$$(3.63) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u_{\varepsilon} + \varepsilon \Delta^2 u_{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & u_{\varepsilon}|_{\Gamma} = 0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

La "solution" limite est la famille de fonctions u de L^2 définies à une fonction harmonique près, qui vérifient

$$(3.64) \quad -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega.$$

La convergence de u_{ε} vers u signifie que $f + \Delta u_{\varepsilon} \rightarrow 0$ dans $H^{-2}(\Omega)$.

Remarque 3.3. - Si la dimension $n \leq 3$, on peut poser $f = \delta_x$,
avec $x \in \overset{\circ}{\Omega}$. ▣

Remarque 3.4. - Si $f \in H^{-1}(\Omega)$, u vérifie le problème de Dirichlet
(3.64) et $u|_{\Gamma} = 0$. Alors $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$. De plus

$$(3.65) \quad |u_{\varepsilon} - u|_{L^2(\Omega)} < C \sqrt{\varepsilon}.$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ dans $H_0^2(\Omega)$ et

$$(3.66) \quad |u_{\varepsilon} - u|_{L^2(\Omega)} < C \varepsilon, \quad \|u_{\varepsilon} - u\|_0 < C \sqrt{\varepsilon}. \quad \text{▣}$$

3.2 L'espace V est H_{γ}^2 . Exemple 2.

Soit $V = H_{\gamma}^2$ et $\pi(u, v)$ donné par (3.59). Alors $H = H_0^1(\Omega)$,
et $V' = L^2(\Omega)$ d'après le Lemme 3.1.

Problème régularisé :

$$(3.67) \quad ((u_{\varepsilon}, v))_0 + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u_{\varepsilon} \Delta v = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \forall v \in H_{\gamma}^2$$

avec $f \in \Xi^{-2}(\Omega)$ (cf. note ⁽¹⁾ page 57) et $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Donc u_{ε} vérifie (cf. la formule de Green (3.8)) :

$$(3.68) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u_{\varepsilon} + \varepsilon \Delta^2 u_{\varepsilon} = f \\ \text{ii)} & u_{\varepsilon}|_{\Gamma} = 0, \quad -\varepsilon \Delta u_{\varepsilon}|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

et converge dans $L^2(\Omega)$ vers u défini par

$$(3.69) \quad \int_{\Omega} u(-\Delta v) = \int_{\Omega} f v - \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \forall v \in H_{\gamma}^2$$

c'est à dire après transformation de (3.69) par la formule de Green

$$(3.70) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u = f \\ \text{ii)} & u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

Remarque 3.5. Il n'y a pas convergence de $u_{\epsilon}|_{\Gamma}$ vers g en général.

L'hypothèse $u \in H$ entraîne $g = 0$ et $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Dans ce cas, (3.65) a lieu, et (3.66) si $f \in L^2(\Omega)$. Enfin la Remarque 3.3 est encore valable ici. ▣

3.3 L'espace V est H_0^2 .

$$(3.71) \quad \pi(u, v) = ((u, v)) \quad , \quad u, v \in H_0^2$$

Lemme 3.3. - Si $H^1(\Omega)$ est identifié à son dual, le dual de H_0^2 s'identifie à $L^2(\Omega)$.

Démonstration.

Comme plus haut, Lemme 3.2, grâce à l'isomorphisme $1 - \Delta$ entre H_0^2 et $L^2(\Omega)$.

Problème variationnel régularisé :

$$(3.72) \quad ((u_{\epsilon}, v)) + \epsilon \int_{\Omega} (\Delta u_{\epsilon} \Delta v + u_{\epsilon} v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma} g v$$

avec $f \in \mathcal{E}^{-2}(\Omega)$ et $g \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$; u_{ϵ} vérifie

$$(3.73) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{\epsilon} - \Delta u_{\epsilon} + \epsilon (\Delta^2 + 1) u_{\epsilon} = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & \frac{\partial u_{\epsilon}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{\epsilon} - \epsilon \Delta u_{\epsilon}) = g \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

et converge dans $L^2(\Omega)$ vers la solution u de

$$(3.74) \quad \begin{cases} \text{i)} & -\Delta u + u = f \\ \text{ii)} & \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{sur } \Gamma . \end{cases}$$

La Remarque 3.5 s'applique, mutatis mutandis.

Remarque 3.6. Il n'est pas nécessaire que $a(u,v) (= \int_{\Omega} \Delta u \Delta v + uv \text{ ici})$

soit coercive si $a(u,v) + ((u,v))$ est coercive; ou se ramène en effet au cas général en posant $\varepsilon' = \varepsilon/(1-\varepsilon)$. Ainsi la théorie s'applique à l'

Exemple 4.

$$(3.75) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_{\varepsilon} - \Delta u_{\varepsilon} + \varepsilon \Delta^2 u_{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} (u_{\varepsilon} - \varepsilon \Delta u_{\varepsilon}) = g \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

avec même limite u .

D'autre part, on peut ajouter à l'opérateur de perturbation Δ^2 un opérateur d'ordre ≤ 2 quelconque, et appliquer le Th. 1.5. Exemple :

$$(3.76) \quad u_{\varepsilon} - \Delta u_{\varepsilon} + \varepsilon (\Delta^2 - \Delta + 1) u_{\varepsilon} + \varepsilon^2 \Delta u_{\varepsilon} = f .$$

etc... La même remarque vaut pour tous les exemples précédents. 

3.4 L'espace V est $H^1(\Delta, \Omega)$.

On désigne ainsi l'espace

$$(3.77) \quad H^1(\Delta; \Omega) = \{u \mid u \in H^1(\Omega), \Delta u \in L^2(\Omega)\}$$

avec le produit scalaire naturel

$$(3.78) \quad [u, v] = ((u, v)) + \int_{\Omega} \Delta u \Delta v$$

Lemme 3.4. - Toute forme linéaire continue sur $V = H^1(\Delta; \Omega)$ s'écrit, de manière unique, avec $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in H^{1/2}(\Gamma)$:

$$(3.79) \quad L(v) = \int_{\Omega} f(v - \Delta v) + \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

Par l'application $u \rightarrow (u, u|_{\Gamma})$, V s'identifie à un sous-espace de $V' = L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$.

En effet (3.79) est conséquence du théorème de Hahn-Banach et on vérifie aisément l'unicité de f et g . ▧

Si $u \in V$, l'expression (3.79) de la dualité coïncide, d'après la formule de Green, avec $((u, v))$. Donc, si l'on pose

$$(3.80) \quad \pi(u, v) = ((u, v))$$

l'espace $H^1(\Omega)$ s'identifie à son dual dans V' . Donc $H = H^1(\Omega)$.

Dans V' , la convergence de u_{ε} vers (f, g) signifie que $u_{\varepsilon} \rightarrow f$ dans $L^2(\Omega)$ et $u_{\varepsilon}|_{\Gamma} \rightarrow g$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

Exemple 5. (Perturbation en Δ^2)

On pose

$$(3.81) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \Delta u \Delta v$$

Bien que cette forme ne soit pas coercive sur $H^1(\Delta; \Omega)$, la théorie s'applique (cf. Remarque 3.6). Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, et

u_ε la solution de

$$(3.82) \quad ((u_\varepsilon, v)) + \varepsilon \int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon \Delta v = \int_{\Omega} f(v - \Delta v) + \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial \nu} \quad \forall v \in H^1(\Delta; \Omega)$$

En particulier, (3.82) a lieu si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc, au sens des distributions :

$$(3.83) \quad \text{i) } u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon = f - \Delta f \quad \text{dans } \Omega .$$

Les conditions aux limites sont plus délicates à interpréter; d'abord, d'après (3.83) :

$$(3.84) \quad \Delta(\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) = f + \Delta u_\varepsilon - u_\varepsilon \in L^2(\Omega)$$

donc ([16]) les traces $(\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f)|_\Gamma$ et $\frac{\partial}{\partial \nu}(\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f)|_\Gamma$ ont un sens et appartiennent respectivement à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$, ce qui permet d'écrire la formule de Green suivante, pour tout $v \in H^2(\Omega)$:

$$(3.85) \quad \int_{\Omega} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) \Delta v - \int_{\Omega} \Delta(\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) v = \int_{\Gamma} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) v$$

Multipliant (3.83) par v , puis intégrant sur Ω , on trouve, tenant compte de (3.) et (3.)

$$(3.86) \quad \int_{\Gamma} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f) v = \int_{\Gamma} g \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} v$$

d'où les conditions aux limites :

$$(3.87) \quad \begin{cases} \text{ii) } \varepsilon \Delta u_\varepsilon + f|_\Gamma = g \\ \text{iii) } \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f - u_\varepsilon) = 0 . \end{cases}$$

Remarque 3.7. - Si $f = u \in H^1(\Omega)$ et $g = u|_{\Gamma}$, u_{ε} converge vers u dans $H^1(\Omega)$ avec les majorations d'erreur suivantes

$$(3.88) \quad \begin{cases} \text{i)} & |u_{\varepsilon} - u|_{L^2(\Omega)} < C \sqrt{\varepsilon} \\ \text{ii)} & |(u_{\varepsilon} - u)|_{\Gamma}|_{H^{1/2}(\Gamma)} < C \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

Si $u \in H^1(\Omega, \Delta)$, on a mieux

$$(3.89) \quad \begin{cases} \text{i)} & |u_{\varepsilon} - u|_{L^2(\Omega)} < C \varepsilon \\ \text{ii)} & |(u_{\varepsilon} - u)|_{\Gamma}|_{H^{1/2}(\Gamma)} < C \varepsilon \end{cases}$$

Remarquons en particulier (3.89) (ii) qui montre que l'approximation est meilleure au voisinage de Γ . 

Remarque 3.8. - La forme du second membre dans (3.82) n'est pas obligatoire.

Soit par exemple

$$(3.90) \quad L(v) = \int_{\Omega} \varphi v - \int_{\Gamma} h v, \quad \varphi \in L^2(\Omega), \quad h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

On se ramène à (3.82) en cherchant f solution de

$$(3.91) \quad \begin{cases} \text{i)} & f - \Delta f = \varphi \\ \text{ii)} & \frac{\partial f}{\partial \nu} = -h \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

et en posant $g = f|_{\Gamma}$.

Le problème approché est

$$(3.92) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon = \varphi \quad \text{dans } \Omega \\ \text{ii)} & \Delta u_\varepsilon|_\Gamma = 0 \\ \text{iii)} & \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon - u_\varepsilon) = h \quad . \end{cases}$$



Exemple 6. (cf. [9], p. 83).

Modifions (3.82) comme ci-dessous :

$$(3.93) \quad ((u_\varepsilon, v)) - \varepsilon^2 ((u_\varepsilon, v))_0 + \varepsilon \int_\Omega \Delta u_\varepsilon \Delta v = \int_\Omega f(v - \Delta v) + \int_\Gamma g \frac{\partial v}{\partial \nu}$$

La convergence a lieu d'après le Théorème 1.5, et le problème régularisé est :

$$(3.94) \quad \begin{cases} \text{i)} & u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + \varepsilon \Delta^2 u_\varepsilon = f - \Delta f \\ \text{ii)} & \varepsilon \Delta u_\varepsilon + f|_\Gamma = g \\ \text{iii)} & \frac{\partial}{\partial \nu} (\varepsilon \Delta u_\varepsilon + f - (1 - \varepsilon^2) u_\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

3.5 REGULARITE.

Le tableau ci-dessous indique la nature de l'espace V_2 pour les exemples précédents. Rappelons que si $u \in V_2$, l'erreur $u_\varepsilon - u$ est en $O(\sqrt{\varepsilon})$ dans V , en $O(\varepsilon)$ dans H , et l'erreur $u_\varepsilon^1 - u = u_\varepsilon - \varepsilon u_\varepsilon' - u$

est en $O(\varepsilon^{3/2})$ dans V' .

Tableau 3.2

V_2	$V (= V_1')$	$H (= V_0')$	$V' (= V_{-1}')$
$H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$	$H_0^2(\Omega)$	$H_0^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)/L^2_\Delta$
$\{u \in H^3(\Omega) , u _\Gamma = 0 , \Delta u _\Gamma = 0\}$	H_γ^2	$H_0^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$
$\{u \in H^3(\Omega) , \frac{\partial u}{\partial \nu} _\Gamma = 0 , \Delta u _\Gamma = 0\}$	H_∂^2	$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega)$
$\{u \in H^1(\Omega) , \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}$	$H^1(\Delta, \Omega)$	$H^1(\Omega)$	$L^2(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$

B I B L I O G R A P H I E

- (1) AUBIN (J.P.).- Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire 12, 1967, 139 p.
- (2) AUBIN (J.P.).- Approximation de problèmes aux limites non homogènes et régularité de la convergence, *Calcolo*, 6, 1, 1969, pp. 117-140.
- (3) BENSOUSSAN (A.).- Sur l'identification et le filtrage de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles, *Cahiers de l'I.R.I.A.*, 1, 1969, 233 p.
- (4) BENSOUSSAN (A.), KENNETH (P.).- Sur l'analogie entre pénalisation et régularisation, *Rev. Inform. et Rech. Opérationnelle*, 13, 1969, pp. 13-25.
- (5) BOURBAKI (N.).- *Espaces vectoriels topologiques.*- Paris, Hermann, 1964. (A.S.I. n° 1229).
- (6) BRAMBLE (J.H.), HUBBARD (B.E.).- A priori bounds in the Numerical solution of the Dirichlet Problem, *Contributions to Differential Equations*, Vol.2, n° 1-4, 1963, pp. 229-252.
- (7) CEA (J.).- Approximation variationnelle des problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 14, 2, 1964, pp.345-444.
- (8) DIXMIER (J.).- *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien .-* Paris, Gauthier-Villars, 1957.

- (9) HUET (D.).- Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 10, 1960, pp. 61-151.
- (10) LAURENT (P.J.).- Etude de procédés d'extrapolation en analyse numérique, *Thèse*, Grenoble, 1964.
- (11) LIONS (J.L.).- Problèmes aux limites en théorie des distributions, *Acta Math.* 94, 1955, pp. 13-153.
- (12) LIONS (J.L.).- *Equations Différentielles Opérationnelles et problèmes aux limites* .- Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1961.
- (13) LIONS (J.L.).- Problèmes aux limites non homogènes à données irrégulières, *Cours donné au C.I.M.E.* (3-11 juillet 1967, Ispra), pp. 285-306 .- Roma, Cremonese.
- (14) LIONS (J.L.) .- *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles* .- Paris, Dunod - GauthierVillars, 1968.
- (15) LIONS (J.L.).- *Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires*.- Paris, Dunod - GauthierVillars, 1969.
- (16) LIONS (J.L.), MAGENES (E.).- *Problèmes aux limites non homogènes* .- Paris, Dunod, 1968.
- (17) LIONS (J.L.), STAMPACCHIA (G.).- *Vational Inequalities*, *Comm. pure & Appl. math.*, 20, 1967, pp. 493-519.
- (18) MACON (N.), SPITZBART (A.).- *Inverse of Vandermonde matrices*, *Amer. Math. Monthly*, 65, 1958, pp.95-100.

- (19) MIGNOT (A.).- Méthodes d'approximation des solutions de certains problèmes aux limites linéaires, *Rend. del sem. Mat della Univ. di Padova*, 11, 1968, 138 p.
- (20) NIRENBERG (L.).- Remarks on strongly elliptic differential equations, *Comm. Pure & Appl. Math.*, 8, 1955, pp. 643-674.
- (21) NEDELEC (J.C.).- *Thèse*, à paraître.
- (22) NIVELET (B.), TERRINE (G.).- *Techniques numériques de l'approximation variationnelle des problèmes elliptiques*. Paris, I.B.P., rapport MMC/10.5.8/AI, 1968.
- (23) NIVELET (B.).- A paraître.
- (24) PAL'TSEV (B.V.).- The expansion of solutions of Dirichlet's problem ..., *Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz*, 6, 1, 1966, pp.43-51 (U.S.S.R. Comp. Math. and math. Physics, pp 59-72).
- (25) PHILLIPS (D.L.).- A technique for the numerical solution of certain équations of the 1st kind, *J.A.C.M.*, 1962, pp. 84-97.
- (26) RIBIERE (G.).- Régularisation d'Opérateurs, *Rev. Inform. & Rech. Opérationnelle*, 5, 1967, pp. 57-79.
- (27) RICHARDSON (L.F.).- The deferred approach to the limit, *Phil. Trans. Roy. soc.*, London, 226, 1927, pp. 229-361.
- (28) RICHARDSON (L.F.).- The Approximate Arithmetic solution by finite Difference of Physical Problems ..., *Phil. Trans. Roy. Soc*, London, 210, 1911, pp. 307-357.
- (29) RILEY (J.D.).- Solving systems of linear equations with a positive definite, symmetric, but Possibly Ill-conditioned Matrix, *Math. Tables Aid. Comput.*, 9, 1956, pp. 96-101.

- (31) TIKHONOV (A.N.).- Incorrectly posed problems and the method of regularization, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 151, 1, 1963 (*Soviet Math.*, 4, 1035, 1963, pp. 49-52).
- (32) TIKHONOV (A.N.).- On the regularization of improperly posed problems, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 153, 3, 1963 (*Soviet Math.*, 4, 1624, 1963, pp. 501-504).
- (33) TIKHONOV (A.N.).- Methods for regularization of optimal control problems, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.*, 162, 4, 1965 (*Soviet Math.*, 6,
- (34) YOSIDA (K.).- *Functional Analysis* .- Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer-Verlag, 1965.

